

第六章 正弦稳态电路分析

本章重点

- | | |
|-----|--------------------|
| 6.1 | 正弦函数及其相量表示法 |
| 6.2 | 伏安特性和基尔霍夫定律的向量表示 |
| 6.3 | 广义欧姆定律、复阻抗及复导纳 |
| 6.4 | 简单正弦电路的稳态分析 |
| 6.5 | 正弦稳态电路的功率 |
| 6.6 | 提高功率因素 |
| 6.7 | 负载获取最大功率（最大功率传输定理） |
| 6.8 | 谐振 |
| 6.9 | 互感耦合电路 |

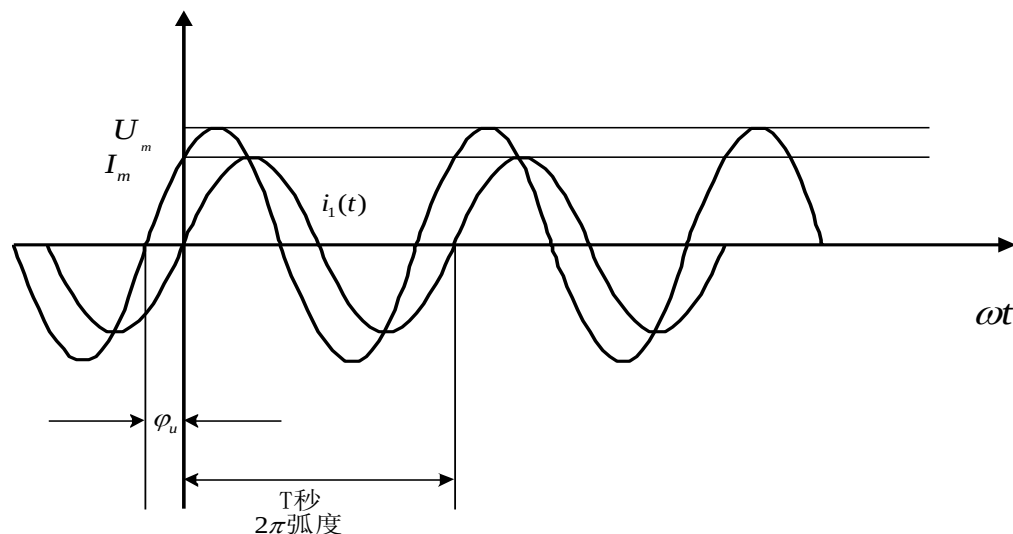
当电路的激励为随时间作正弦变化的电压源、电流源，电路中又不存在开闭、断路、短路现象时。电路的运行状态为正弦稳态。求在正弦稳态运行下电路中的支路电压、支路电流及电路的功率等一系列的分析计算称为正弦稳态分析。

6.1 正弦函数及其相量表示法

6.1.1 正弦量的三要素

正弦电压 $u(t) = U_m \sin(\omega t + \varphi_u)$

其中： U_m ， ω ， φ_u 称为正弦三要素。
只要这三者确定，则正弦函数就被唯一地确定了。

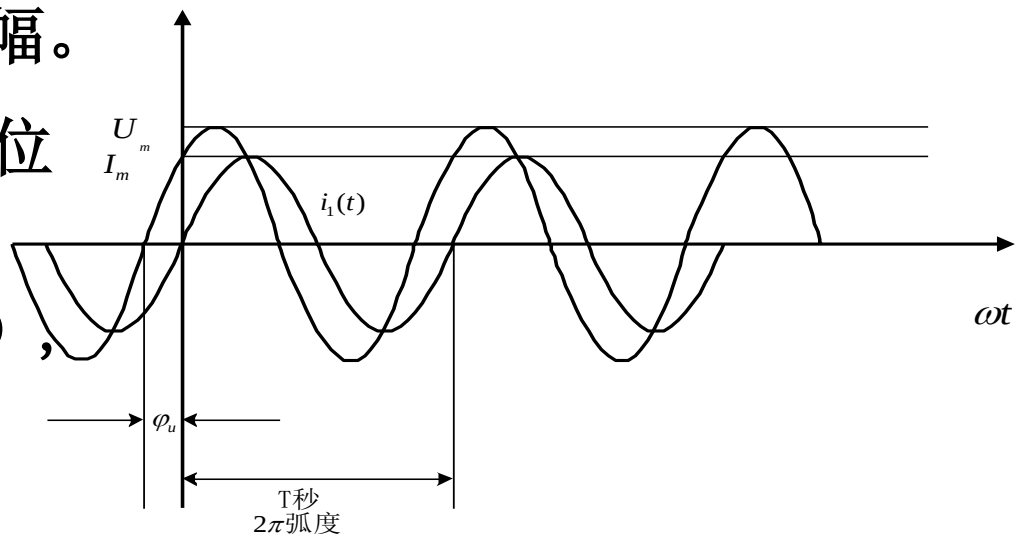


U_m 称为正弦量的最大值或振幅。

ω 称为正弦量的角频率，单位为弧度rad。

φ_u 称为正弦量的初相位（角），单位为度或弧度。

$(\omega t + \varphi_u)$ 称为相位（角）。



当时间经过一周即T秒后波形又重复出现。

$$\therefore \omega t = 2\pi$$

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi f$$

f 为正弦函数的频率，单位为周/秒或赫兹（Hz）。

6.1.2 两个同频率正弦量的相位差

设有：

$$u(t) = U_m \sin(\omega t + \varphi_u)$$

$$i(t) = I_m \sin(\omega t + \varphi_{i_1})$$

如图6.1.1。两正弦量的角频率相同。相位差：

$$\varphi = (\omega t + \varphi_u) - (\omega t + \varphi_{i_1}) = \varphi_u - \varphi_{i_1}$$

可见同频率正弦量的相位之差等于初相之差。
设：

$$u(t) = U_m \sin(\omega t + 60^\circ)$$

$$i_1(t) = I_m \sin(\omega t + 0^\circ)$$

$$\varphi = \varphi_u - \varphi_{i_1} = 60^\circ - 0^\circ > 0$$

从波形图上清楚看到 $u(t)$ 超前于 $i_1(t)$

$\therefore \varphi > 0$ 表示 $u(t)$ 超前于 $i_1(t)$

$\therefore \varphi < 0$ 表示 $u(t)$ 滞后于 $i_1(t)$

$\therefore \varphi = 0$ 表示 $u(t)$ 与 $i_1(t)$ 同相

$\therefore \varphi = \pm \frac{\pi}{2}$ 表示 $u(t)$ 与 $i_1(t)$ 正交

$\therefore \varphi = \pm \pi$ 表示 $u(t)$ 与 $i_1(t)$ 反相

需要说明的是：

- 1.所谓“超前”，“滞后”只是反映各个物理量变化的进程；通俗的讲，就是最大值，0值出现的时刻的差异，并不是指他们产生或出现的先后；
- 2.正弦量的初相，相位差一般取小于 π 的角度；
- 3.不同频率的正弦量无相位差可言。

6.1.3 正弦量的有效值

正弦交流电的电压，电流都是随时间作正弦变化的。一般用它的有效值进行计算和测量比较方便。

正弦量的有效值是指在一个周期时间内，与之有相同的热，光，机械力效应的直流电的数值。试验分析证明，无论根据哪种效应计算周期交变量的有效值，其结果相同。

以电流为例，从热效应来分析，设直流电流为 I ，正弦交流电流 $i(t)$

$$Q_I = 0.24IVT \xrightarrow{(\text{令 } t=T)} \underline{\underline{0.24I^2RT}}$$

$$Q_{i(t)} = \int_0^T 0.24v(t')i(t')dt' = \int_0^T 0.24Ri^2(t')dt'$$

$$\therefore Q_I = Q_{i(t)} \qquad \therefore I^2 = \frac{1}{T} \int_0^T i^2(t')dt'$$

$$I = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T i^2(t') dt'}$$

设 $i(t') = I_m \sin(\omega t' + \varphi_i)$

$$I = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T I_m^2 \sin^2(\omega t' + \varphi_i) dt'} = \sqrt{\frac{I_m^2}{T} \int_0^T \frac{1}{2} [1 - \cos 2(\omega t' + \varphi_i)] dt'} = \sqrt{\frac{I_m^2}{T} \cdot \frac{T}{2}} = \frac{I_m}{\sqrt{2}}$$

正弦电流 $i(t) = I_m \sin(\omega t + \varphi_i)$ 的有效值 **I** 等于其最大值（或振幅）除以 $\sqrt{2}$ ，最大值（振幅）等于有效值乘以 $\sqrt{2}$ 。

$$I_m = \sqrt{2}I \quad I = \frac{I_m}{\sqrt{2}}$$

$$i(t) = \sqrt{2}I \sin(\omega t + \varphi_i)$$

正弦电压也一样 $u(t) = U_m \sin(\omega t + \varphi_u) = \sqrt{2}U \sin(\omega t + \varphi_u)$

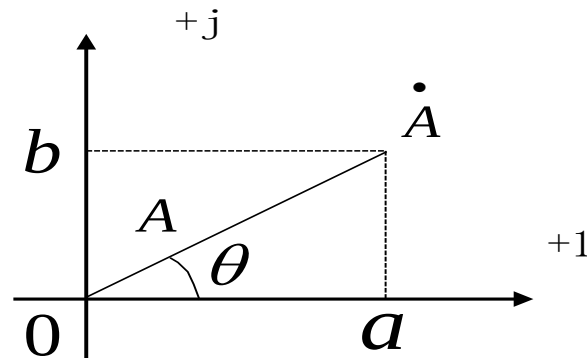
我国民用电（单相）电压**220 V**就是指有效值**U=220V**。
其中最大值 $U_m = \sqrt{2} \times 220V$ ，即**311V**。

6.1.4. 正弦量的相量表示法

从复数的知识，一个复数 $\dot{A}$ 可以用复平面上的一点表示，也可以用从原点到该点的有向线段表示。 $\dot{A}=a+jb$ 在实轴上的投影为 a ，在虚轴上的投影为 b 。

$$a = A\cos\theta \quad b = A\sin\theta \quad A = \sqrt{a^2 + b^2}$$

$$\therefore \dot{A} = A\angle\theta \quad \text{或} \quad \dot{A} = Ae^{j\theta}$$



代数式 $\dot{A}=a+jb$ 有利于复数的“+”，“-”运算，极坐标式 $\dot{A}=A\angle\theta$ 或指数式 $\dot{A}=Ae^{j\theta}$ 有利于“ $\times$ ”，“ $\div$ ”运算和“ $\frac{d}{dt}$ ”，“ $\int dt$ ”运算。且 $\dot{A}$ 的表示都只有两个要素。

正弦量的 $u(t) = U_m \sin(\omega t + \varphi_u)$, $i(t) = I_m \sin(\omega t + \varphi_i)$ 等有三个要素 U_m , ω , φ_u ; I_m , ω , φ_i ; 而线性定常电路中, 各处的电压, 电流响应, 其角频率 ω 都与激励的角频率 ω 相同。因而在正弦稳态分析中可以暂时不考虑角频率这个因素, 只考虑各正弦量的振幅和初相。这样正弦量也就只有两个要素了。如果将正弦量也用复数表示。那么分析的过程就简单易行。例如

$i_1(t) + i_2(t) = I_{m1} \sin(\omega t + \varphi_{i1}) + I_{m2} \sin(\omega t + \varphi_{i2})$ 的推算过程就比较繁。

附*

$$\begin{aligned}
 i(t) &= i_1(t) + i_2(t) = I_{m1} [\sin \omega t \cos \varphi_{i1} + \cos \omega t \sin \varphi_{i1}] + I_{m2} [\sin \omega t \cos \varphi_{i2} + \cos \omega t \sin \varphi_{i2}] \\
 &= [I_{m1} \sin \omega t \cos \varphi_{i1} + I_{m2} \sin \omega t \cos \varphi_{i2}] + [I_{m1} \cos \omega t \sin \varphi_{i1} + I_{m2} \cos \omega t \sin \varphi_{i2}] \\
 &= (I_{m1} \cos \varphi_{i1} + I_{m2} \cos \varphi_{i2}) \sin \omega t + (I_{m1} \sin \varphi_{i1} + I_{m2} \sin \varphi_{i2}) \cos \omega t \\
 &= \sqrt{(I_{m1} \cos \varphi_{i1} + I_{m2} \cos \varphi_{i2})^2 + (I_{m1} \sin \varphi_{i1} + I_{m2} \sin \varphi_{i2})^2} \times \\
 &\quad \left[\frac{(I_{m1} \cos \varphi_{i1} + I_{m2} \cos \varphi_{i2}) \sin \omega t}{\sqrt{(I_{m1} \cos \varphi_{i1} + I_{m2} \cos \varphi_{i2})^2 + (I_{m1} \sin \varphi_{i1} + I_{m2} \sin \varphi_{i2})^2}} + \right. \\
 &\quad \left. \frac{(I_{m1} \sin \varphi_{i1} + I_{m2} \sin \varphi_{i2}) \cos \omega t}{\sqrt{(I_{m1} \cos \varphi_{i1} + I_{m2} \cos \varphi_{i2})^2 + (I_{m1} \sin \varphi_{i1} + I_{m2} \sin \varphi_{i2})^2}} \right]
 \end{aligned}$$

$$= \sqrt{(I_{m1} \cos \varphi_{i1} + I_{m2} \cos \varphi_{i2})^2 + (I_{m1} \sin \varphi_{i1} + I_{m2} \sin \varphi_{i2})^2} \sin(\omega t + \varphi)$$

$$= \sqrt{I_{m1}^2 + I_{m2}^2 + 2I_{m1}I_{m2}(\sin \varphi_{i1} \sin \varphi_{i2} + \cos \varphi_{i1} \cos \varphi_{i2})} \sin(\omega t + \varphi)$$

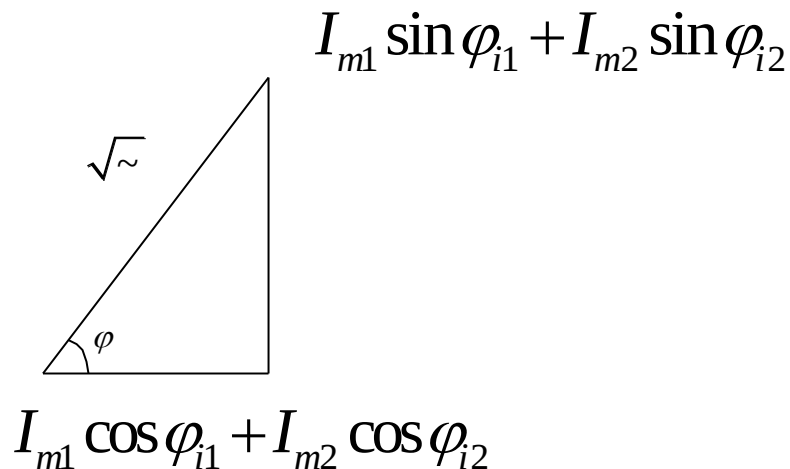


图 6.1.2b) φ 角的由来

其中：

$$\sqrt{\sim} = \sqrt{(I_{m1} \cos \varphi_{i1} + I_{m2} \cos \varphi_{i2})^2 + (I_{m1} \sin \varphi_{i1} + I_{m2} \sin \varphi_{i2})^2}$$

而采用复数表示正弦量就简单多了。

$$i_1(t) \rightarrow Im_1 \angle \theta_1 \quad i_2(t) \rightarrow Im_2 \angle \theta_2$$

$$\begin{aligned} i(t) = i_1(t) + i_2(t) &\rightarrow \dot{I}_m = I_{m1} \angle \theta_{i1} + I_{m2} \angle \theta_{i2} \\ &= I_{m1} \cos \varphi_{i1} + j I_{m1} \sin \varphi_{i1} + I_{m2} \cos \varphi_{i2} + j I_{m2} \sin \varphi_{i2} \\ &= a_1 + j b_1 + a_2 + j b_2 \\ &= a_1 + a_2 + j(b_1 + b_2) \\ &= I_{m1} \cos \varphi_{i1} + I_{m2} \cos \varphi_{i2} + j(I_{m1} \sin \varphi_{i1} + I_{m2} \sin \varphi_{i2}) \\ &= I_m \cos \varphi + j I_m \sin \varphi \\ &= a + j b \\ &= I_m \angle \varphi \end{aligned}$$

矢量相加见图6.1.2c)。

可见采用了复数表示正弦量以后，其“+”，“-”运算确实简化了。同样“ $\times$ ”，“ $\div$ ”，“ $\frac{d}{dt}$ ”，“ $\int dt$ ”也都简单得多。运算完了再将 ω 写进时间函数表达式即可。

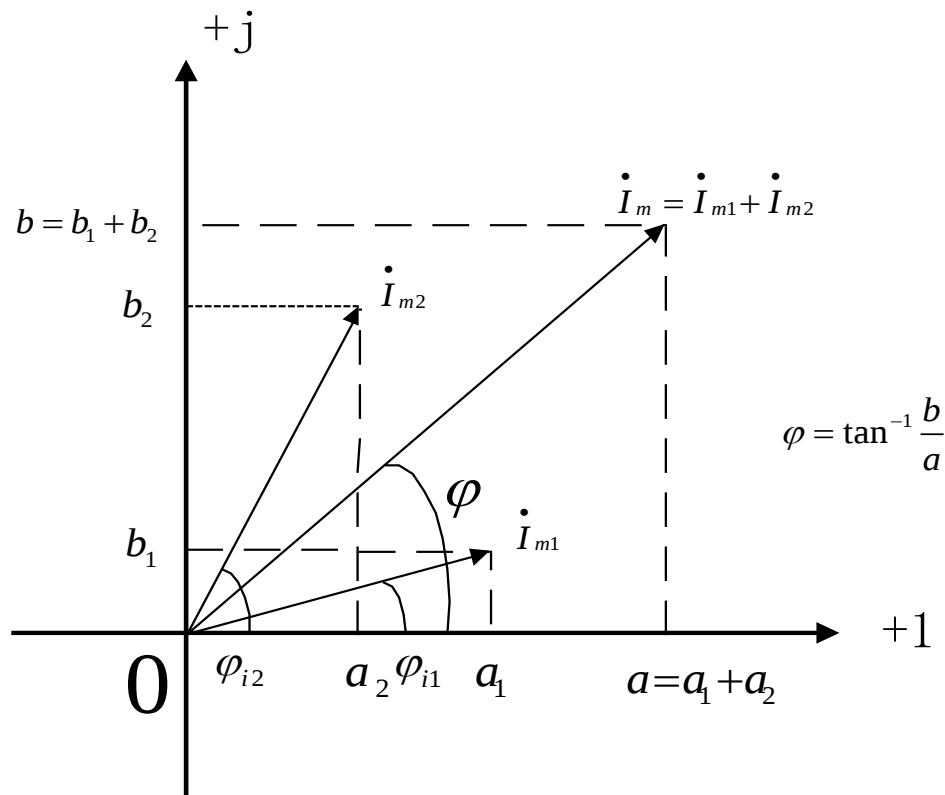


图6.1.2c)

$$\dot{I}_m = \dot{I}_{m1} + \dot{I}_{m2} = (a_1 + a_2) + j(b_1 + b_2) = a + jb$$

例如上面的 $i(t) = I_m \sin(\omega t + \varphi)$

【定义】表示随时间作正弦变化的交流量的复数，称为正弦量的相量。

$$i(t) \xrightarrow{\text{表示为}} \dot{I}_m = I_m \angle \varphi_i$$

$$\dot{I}_m = \sqrt{2} I \angle \varphi_i \quad \text{其中 } I \angle \theta_\varphi \text{ 称为有效值相量，用 } \dot{I} \text{ 表示}$$

$$\text{即 } \dot{I} = I \angle \varphi_i, \quad \therefore \dot{I}_m = \sqrt{2} \dot{I}$$

旋转向量：将 $\dot{I}_m$ 乘以旋转因子 $e^{j\omega t}$ ，则 $I_m e^{j\varphi_i} \cdot e^{j\omega t} = I_m e^{j(\omega t + \varphi_i)}$ 在复平面上是一个以 ω 为角速度逆时针旋转的复数，其矢径 I_m 及初相角 φ 与前面相同。 $I_m e^{j(\omega t + \varphi_i)}$ 在实部的投影为 $I_m \cos(\omega t + \varphi_i)$ ，在虚部的投影为 $I_m \sin(\omega t + \varphi_i)$ 。见图6.1.2d)。

$$\therefore i(t) = I_m I_m e^{j(\omega t + \varphi_i)}$$

$$\text{正弦电流} \quad i(t) = I_m I_m e^{j(\omega t + \varphi_i)}$$

$$\text{正弦电压} \quad u(t) = I_m U_m e^{j(\omega t + \varphi_u)}$$

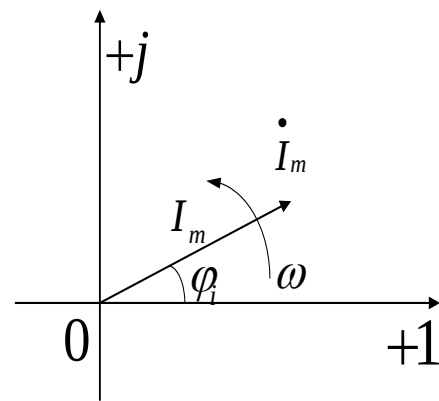
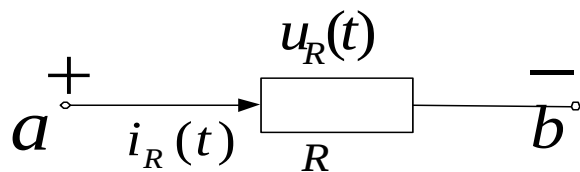


图 6.1.2d)

6.2 线性定常R, L, C元件的伏安特性的相量表示及基氏两定律的向量表示

6.2.1 线性定常元件电阻R



设其上的电压电流方向相关联。

若 $u_R(t) = Ri_R(t)$

则 $i_R(t) = \sqrt{2}I_R \sin(\omega t + \varphi_i)$

可见 $u_R(t) = R\sqrt{2}I_R \sin(\omega t + \varphi_i) = \sqrt{2}RI_R \sin(\omega t + \varphi_u)$

$$u_{Rm} = R \cdot I_{Rm}$$

6—2—1 (1)式

$$U_R = RI$$

6—2—1 (2)式

$$\varphi_u = \varphi_i$$

$$\therefore \text{如果 } i_R(t) \rightarrow \dot{I}_{Rm} = I_{Rm} \angle \varphi_i = \sqrt{2} I_R \angle \varphi_i$$

$$\text{则 } u_R(t) \rightarrow \dot{U}_{Rm} = U_{Rm} \angle \varphi_u = R I_{Rm} \angle \varphi_u = R \dot{I}_{Rm} \quad \text{6-2-1 (3)式}$$

$$\dot{U}_R = R \dot{I}_R \quad \text{6-2-1 (4)式}$$

由6-2-1 (1) , 6-2-1 (2) , 6-2-1 (3) , 6-2-1 (4) 式可见线性定常电阻元件R其上的电压电流在关联正向下不管是最大值之间, 有效值之间, 最大值相量之间, 有效值相量之间都遵循欧姆定律。

6. 2. 2. 线性定常元件电容C

同样假设其上电压 $u_c(t)$ 与 $i_c(t)$ 方向关联。如图6.2.1a)

假设

$$u_c(t) = U_{cm} \sin(\omega t + \varphi_u) = I_m U_{cm} e^{j(\omega t + \varphi_u)}$$

则

$$i_c(t) = C \frac{du_c(t)}{dt} = C \frac{d[I_m U_{cm} e^{j(\omega t + \varphi_u)}]}{dt}$$

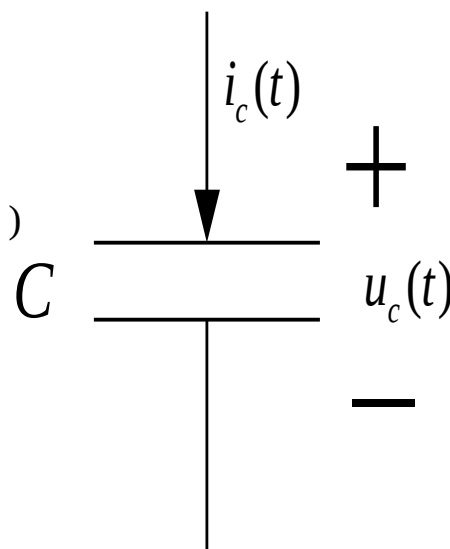


图6.2.1a)C 元件
得瞬时值模型

由于微分算子与取虚部算子都是线性算子故可以相互调换位置即先微分再取虚部。

$$i_c(t) = I_m c U_{cm} \frac{d e^{j(\omega t + \varphi_u)}}{dt} = I_m j \omega c U_{cm} e^{j(\omega t + \varphi_u)} = I_m \omega c U_{cm} e^{j(\omega t + \varphi_u + \frac{\pi}{2})}$$

而 $i_c(t) = I_m I_{cm} e^{j(\omega t + \varphi_i)}$

$$\therefore I_{cm} = \omega c U_{cm} \quad \varphi_i = \varphi_u + \frac{\pi}{2}$$

$$u_c(t) \rightarrow \dot{U}_{cm} \angle \varphi_u \quad \text{则} \quad i_c(t) \rightarrow \dot{I}_{cm} = I_{cm} \angle \varphi_i$$

根据以上推导可知 $\dot{I}_{cm} = \omega c U_{cm} \angle(\varphi_u + \frac{\pi}{2}) = j \omega c \dot{U}_{cm}$

及 $\dot{U}_{cm} = \frac{1}{j \omega c} \dot{I}_{cm} = -j \frac{1}{\omega c} \dot{I}_{cm}$ 6-2-2 (1), $U_{cm} = \frac{1}{\omega c} I_{cm}$

两边同乘以 $\frac{1}{\sqrt{2}}$; 则有 $\dot{U}_c = -j \frac{1}{\omega c} \dot{I}_c$ 6-2-2 (2), $U_c = \frac{1}{\omega c} I_c$

可见 $\frac{1}{\omega C}$ 相当于电阻元件的电阻的作用。 $U_{cm} = \frac{1}{\omega C} I_{cm}$ 及 $U_c = \frac{1}{\omega C} I_c$ 与电阻元件的欧姆定律表达式相似。

将 $\frac{1}{\omega C} = X_c$ 称为容抗，具有电阻的量纲，基本单位为欧姆。 X_c 是一个与角频率成反比的量，其特性随 ω 变化的曲线如图

6.2.1b)

$$\therefore \dot{U}_{cm} = -j \frac{1}{\omega C} \dot{I}_{cm}, \dot{I}_{cm} = j\omega C \dot{U}_{cm} \quad 6-2-2 \quad (3)$$

$$\therefore \dot{U}_c = -j \frac{1}{\omega C} \dot{I}_c, \dot{I}_c = j\omega C \dot{U}_c \quad 6-2-2 \quad (4)$$

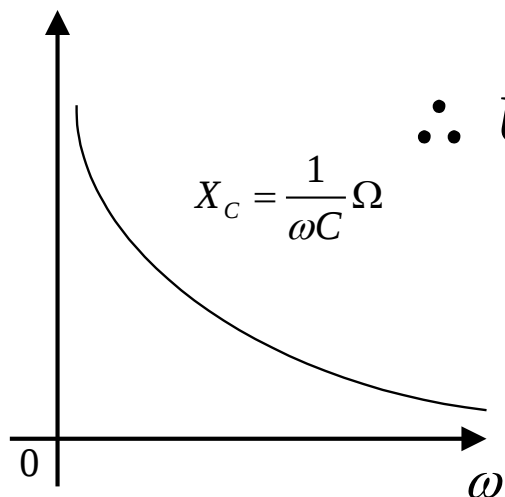


图6.2.1b) X_c 的频率特性

均称为电容元件的 VI 特性的相量形式或称为电容元件的相量模型，可表示为图6.2.1c)。

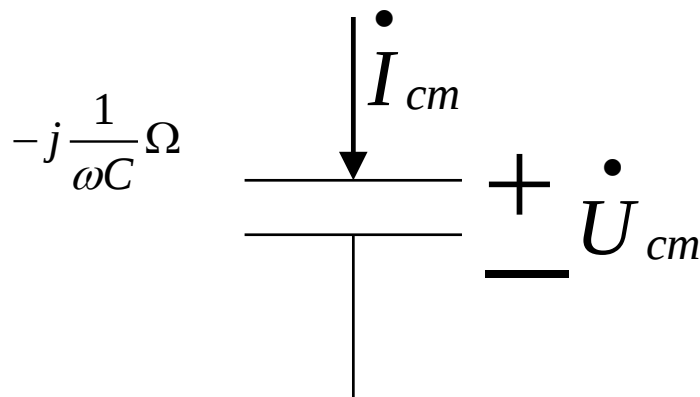


图6.2.1c)C元件的相量模型

如果将其向量 $\dot{U}_{cm} \sim \dot{I}_{cm}$, $\dot{U}_c \sim \dot{I}_c$ 的关系用图表示，该图称为相量图。在画相量图时一般要假设一个参考相量，参考向量的初相位设为 0° 。现假设 $\dot{u}_c(t) = U_{cm} \sin(\omega t + \varphi_u)$ 为参考相量。其中 $\varphi_u = 0^\circ$ 。即将 U_{cm} 或 $\dot{U}_c$ 作为参考向量。 $\dot{U}_{cm} = U_{cm} \angle 0^\circ$, $\dot{I}_{cm} = j\omega C U_{cm}$ 放在水平位置上。 $\dot{U}_c = U_c \angle 0^\circ$;

$\therefore \dot{I}_{cm}$ (或) $\dot{I}_c$ 超前 $\dot{U}_{cm}$ 90° ,
见图6.2.1d)。

如果设 $i_c(t)$ 的初相位为0, 则
 $\dot{I}_{cm} = I_{cm} \angle 0^\circ$, $\dot{U}_{cm} = -j \frac{1}{\omega C} \dot{I}_{cm}$, 只要将图
6.2.1d) 顺时针旋转 90° 。

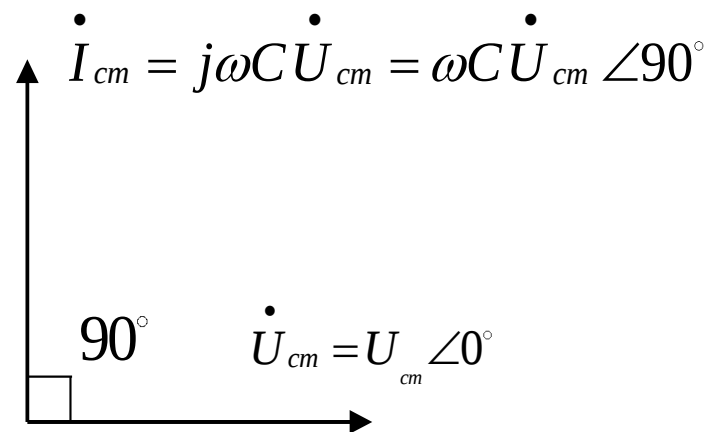


图6.2.1d) C元件电压电流
的相量图, 本图中以 $\dot{U}_{cm}$ 作
参考相量

即可如图6.2.1e)所示。超前 $\dot{U}_{cm}$ 90° 或者说纯电容元件上
电压总是滞后电流 90° 。

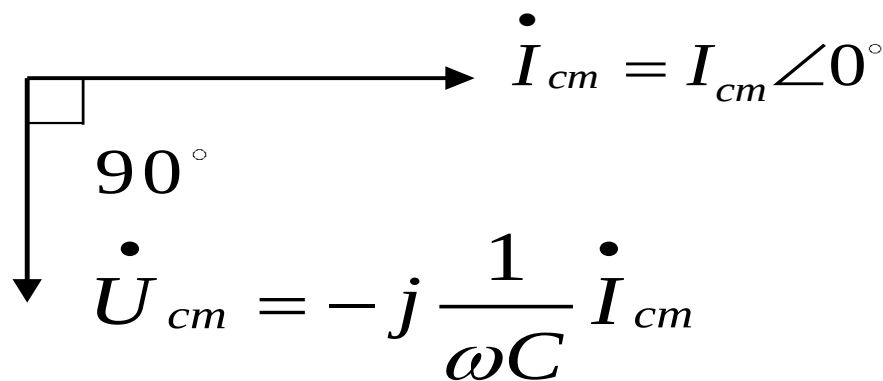


图 6.2.1e)

6.2.3. 线性定常元件电感L

同样假设其上电压 $u_L(t)$ 与电流 $i_L(t)$ 方向相关联。如图6.2.2a) 所示。

$$\text{而 } i_L(t) = I_{Lm} \sin(\omega t + \varphi_i) = I_m I_{Lm} e^{j(\omega t + \varphi_i)}$$

$$u_L(t) = L \frac{di_L(t)}{dt} = L \frac{d I_m I_{Lm} e^{j(\omega t + \varphi_i)}}{dt} = I_m L I_{Lm} \frac{de^{j(\omega t + \varphi_i)}}{dt}$$

$$= I_m j\omega L I_{Lm} e^{j(\omega t + \varphi_i)}$$

$$= I_m \omega L I_{Lm} e^{j(\omega t + \varphi_i + \frac{\pi}{2})}$$

$$= I_m U_{Lm} e^{j(\omega t + \varphi_u)}$$

$$\therefore U_{Lm} = \omega L I_{Lm} \quad ; \quad \varphi_u = \varphi_i + \frac{\pi}{2}$$

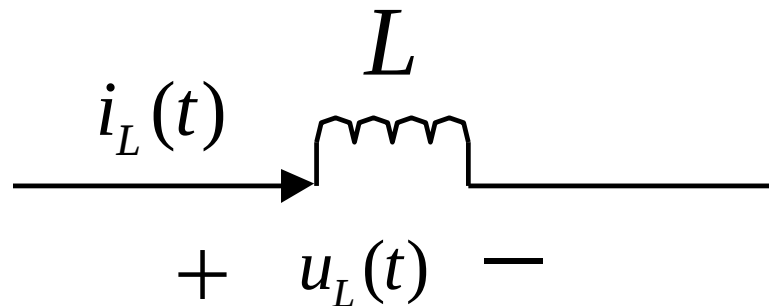


图6.2.2a) 元件时域模型

$$\therefore i_L(t) \rightarrow \dot{I}_{Lm} = I_{Lm} \angle \varphi_i$$

$$u_L(t) \rightarrow \dot{U}_{Lm} = U_{Lm} \angle \varphi_u = \omega L I_{Lm} \angle (\varphi_i + \frac{\pi}{2}) = j\omega L \dot{I}_{Lm}$$

$$\text{及 } \dot{U}_L = j\omega L \dot{I}_L \quad \mathbf{6-2-3 (1)}$$

从 $U_{Lm} = \omega L I_{Lm}$, $U_L = \omega L I_L$ 即 $\dot{U}_{Lm} = \omega L I_{Lm} \angle (\varphi_i + \frac{\pi}{2})$ 可知:

ωL 相当于电阻的作用且具有电阻的量纲, 其基本单位为欧姆。

用 X_L 表示, 称为感抗。 $\omega L = X_L$ 是与角频率 ω 成正比的, 其与 ω 的关系用曲线表示为图6.2.2a)。

设 $\dot{I}_{Lm}$ 为参考相量即 $\dot{I}_{Lm} = I_{Lm} \angle 0^\circ$ 。则 $\dot{U}_{Lm} = j\omega L \dot{I}_{Lm}$ 。相量图如图6.2.2b)。

若以 $\dot{U}_{Lm}$ 为参考向量，则将6.2.2c)的相量图顺时针旋转 $\frac{\pi}{2}$ 即可，见图6.2.2c)可见纯电感元件上，电压超前于电流 $\frac{\pi}{2}$ 。

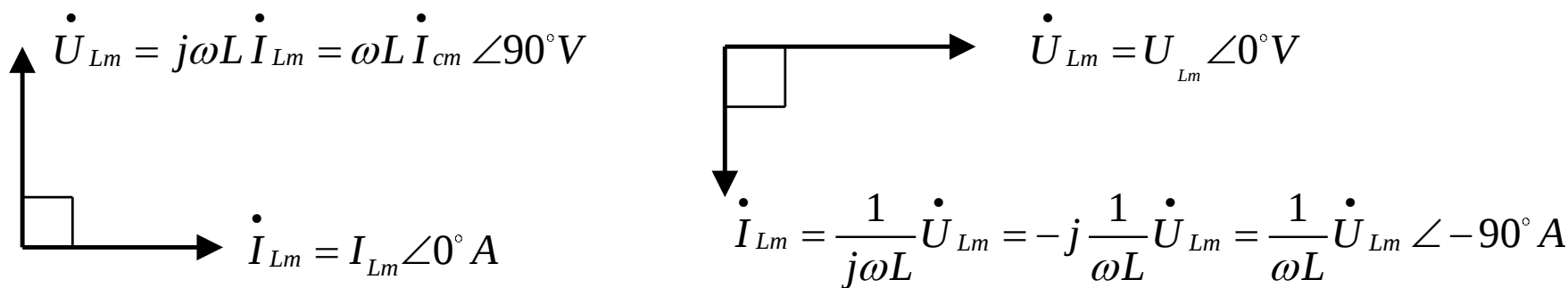


图 6.2.2c) L元件的电压，电流相量图

6. 2. 4. 基氏两定律的相量表示法

$$\sum_{k=1}^n i_k(t) = 0$$

$$\text{其中 } i_k(t) = I_{km} \sin(\omega t + \varphi_{ik}) = I_m I_{km} e^{j(\omega t + \varphi_{ik})}$$

$$\therefore \sum_{k=1}^n i_k(t) = \sum_{k=1}^n I_m I_{km} e^{j\varphi_{ik}} e^{j\omega t} = I_m \sum_{k=1}^n \dot{I}_{km} e^{j\omega t}$$

$$\sum_{k=1}^n i_k(t) = 0 \quad \mathbf{6-2-4 (2)} \quad \text{即} \quad \sum_{k=1}^n \dot{I}_{km} = 0$$

$$\text{即} \quad \sum_{k=1}^n \dot{I}_k = 0 \quad \mathbf{6-2-4 (2)}$$

$$\text{同理, 有} \quad \sum_{k=1}^m \dot{U}_{km} = 0 \quad \mathbf{6-2-4 (3)}$$

$$\text{及} \quad \sum_{k=1}^m \dot{U}_k = 0 \quad \mathbf{6-2-4 (4)}$$

6.3 广义欧姆定律、复阻抗及复导纳

6.3.1 广义欧姆定律、复阻抗

有电路如图6.3.1a)。据KVL有 $u_S(t) = u_R(t) + u_L(t) + u_C(t)$ (6-3-1a)

据KCL有 $i_R(t) = i_L(t) = i_C(t)$ (6-3-1b)

$u_S(t)$ 为正弦时间函数。

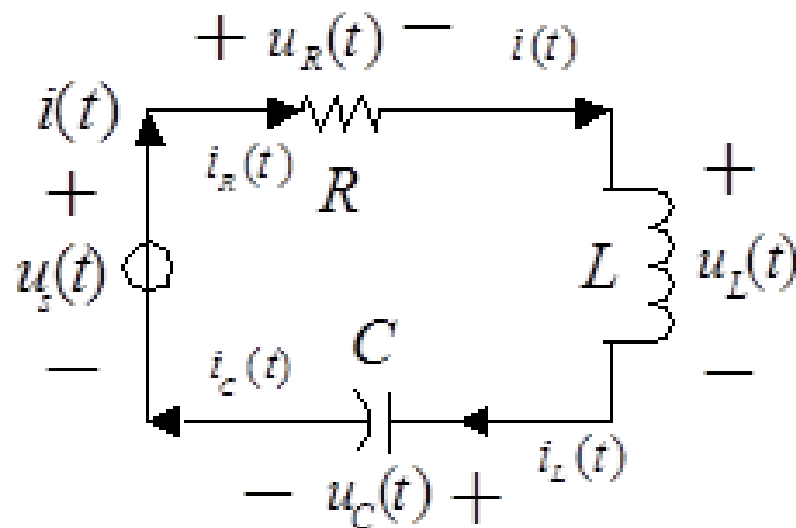


图 6.3.1a) R, L, C 串联电路

如果将6-3-1a式中两边同时取相量并带入元件特性。

有：

$$\dot{U}_{Sm} = \dot{U}_{Rm} + \dot{U}_{Lm} + \dot{U}_{cm} = R\dot{I}_{Rm} + j\omega L\dot{I}_{Lm} + (-j\frac{1}{\omega C})\dot{I}_{cm}$$

又 $\because \dot{I}_{Rm} = \dot{I}_{Lm} = \dot{I}_{cm} = \dot{I}_m$

$$\therefore \dot{U}_{Sm} = (R + j\omega L - j\frac{1}{\omega C})\dot{I}_m \quad 6-3-1 \quad (1)$$

及 $\dot{U}_s = (R + j\omega L - j\frac{1}{\omega C})\dot{I} \quad 6-3-1 \quad (2)$

式中 $R + j\omega L - j\frac{1}{\omega C}$ 相当于电阻作用，把 $\dot{U}_{Sm}$ 和 $\dot{I}_{Sm}$ 联系起来。

但它是一个复数包含实虚两部。故叫做**复阻抗**，用 Z 表示。 Z 显然一般来说是频率 ω 的函数，所以有时也表示为 $Z(j\omega)$ ，具有电阻的量纲。基本单位为欧姆。但它不是时间函数的相量，所以一般 Z 上不打“ $\bullet$ ”，而代表时间函数的向量上打“ $\bullet$ ”，如 $\dot{I}$ ， $\dot{U}$ 等。

复阻抗的一般表达式为 $Z = R + jX$ 6-3-1 (3) ， **R** 称为电阻， **X** 成为电抗。

在上述 **R** ， **L** ， **C** 串连电路中 $X = X_L - X_C = \omega L - \frac{1}{\omega C}$ 。

$\omega L > 0$ ， $\frac{1}{\omega C} > 0$ ， 但 $X = \omega L - \frac{1}{\omega C}$ 可以大于**0**，小于**0**或等于**0**。

当 $X > 0$ 表明 $X_L > X_C$ 即 $\omega L > \frac{1}{\omega C}$ ，电路呈感性。

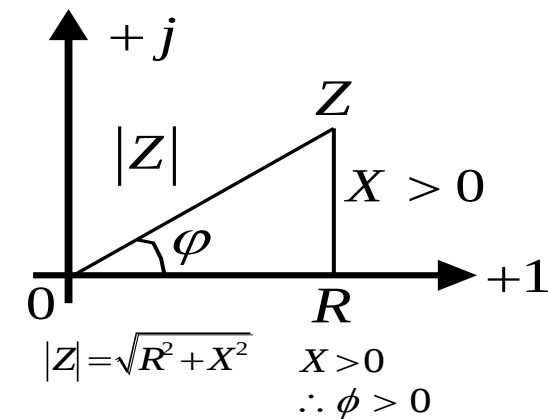
当 $X < 0$ 表明 $X_L < X_C$ 即 $\omega L < \frac{1}{\omega C}$ ，电路呈容性。

当 $X = 0$ 表明 $X_L = X_C$ 即

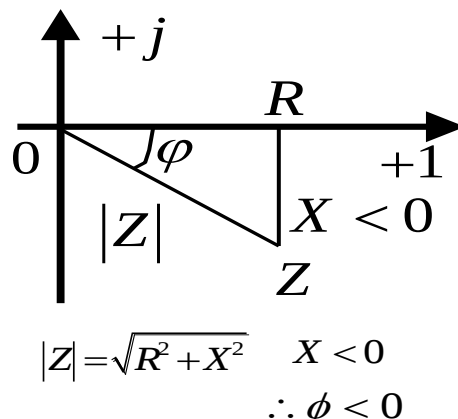
$$\omega L = \frac{1}{\omega C} \quad , \quad \text{此时 } Z = R, \text{ 电路呈电阻性。}$$

如果把 $Z = R + jX$ 画在复平面上，则 R ， X ， $|Z|$

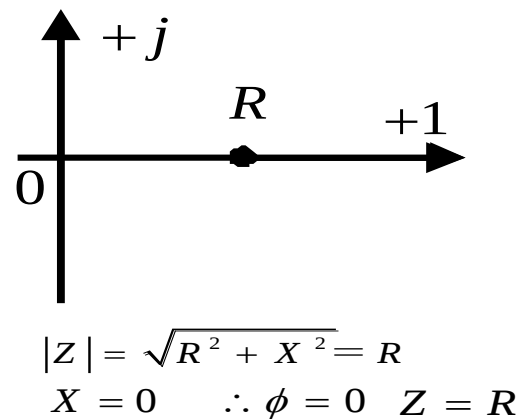
组成的 Δ 称为**阻抗三角形**。见图6.3.1b）。



$\therefore$ 感性电路阻抗角大于0



$\therefore$ 容性电路阻抗角小于0



$\therefore$ 电阻电路阻抗角为0

图 6.3.1b) 阻抗三角形

$Z = |Z| \angle \phi$, $|Z|$ 称为复阻抗Z的模, $\angle \phi$ 称为复阻抗Z的阻抗角。

如果把 $\dot{U}_{Sm} = (R + jX) \dot{I}_m$ 中的 $\dot{I}_m$ 选为参考向量。 $\dot{I}_m = I_m \angle 0^\circ$ 则

$$\dot{U}_{Sm} = R \dot{I}_m + jX \dot{I}_m = RI_m + jXI_m = \sqrt{(RI_m)^2 + (XI_m)^2} \angle \tan^{-1} \frac{X}{R} = \sqrt{R^2 + X^2} I_m \angle \phi$$

若 $X > 0$ ，则 U_{sm} ， RI_m ， XI_m 组成的三角形与 $X > 0$ 的阻抗三角形相似，其中 $U_{sm} = \sqrt{R^2 + X^2} \cdot I_m = |Z| I_m$ ，电压三角形只是将阻抗三角形三边同时乘以 I_m 即可。见图6.3.1c)。

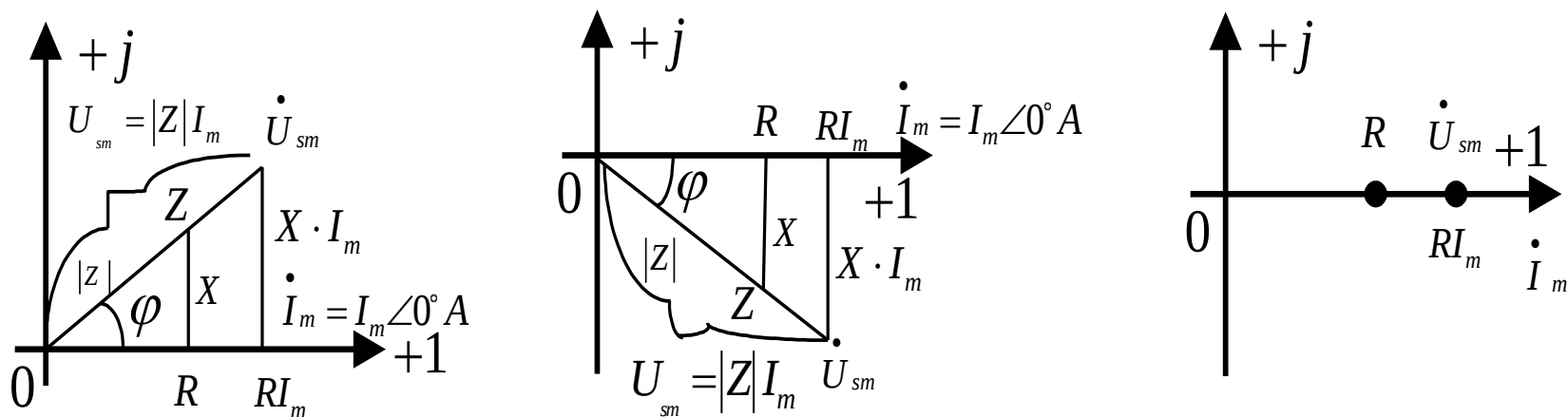


图6.3.1c)阻抗三角形与电压三角形

从电压三角形也可知：当电路呈感性时电压 $\dot{U}_S$ 超前于电流 $\dot{I}$ 。（ $u_S(t)$ 超前于 $i(t)$ ）

当电路呈容性时电压 $\dot{U}_S$ 滞后于电流 $\dot{I}$ 。

当电路呈阻性时电压 $\dot{U}_S$ 与电流 $\dot{I}$ 同相位。

例1、在图6.3.1a)电路中 $R = 30\Omega$ ， $L = 2.55mH$ ， $C = 0.0796\mu F$
正弦电压源的电压有效值 $U = 5V$ ，频率 $f = 10kHz$ ，求电流 $i(t)$ 和各元件上的电压并绘出相量图。

解： $f = 10 \times 10^3 Hz$ $\omega = 2\pi f = 6.28 \times 10^4 rad/s$

$$X_L = \omega L = 6.28 \times 10^4 \times 2.25 \times 10^{-3} = 160\Omega$$

$$X_C = \frac{1}{\omega C} = \frac{1}{6.28 \times 10^4 \times 0.0796 \times 10^{-6}} = 200\Omega$$

$$Z = R + j(X_L - X_C) = 30 + j(160 - 200) = 30 - j40 = 50\angle(-53.1^\circ)$$

(容性)

$$\dot{I} = \frac{\dot{U}}{Z} = \frac{5\angle\varphi_u}{50\angle-53.1^\circ} = 0.1\angle(\varphi_u + 53.1^\circ) = 0.1\angle\varphi_i$$

$$\text{令 } \varphi_i = 0^\circ \quad \varphi_u + 53.1^\circ = 0 \quad \varphi_u = -53.1^\circ$$

$$\text{即 } \dot{U} = 5\angle-53.1^\circ V$$

$$\dot{U}_R = R\dot{I} = 30 \times 0.1\angle 0^\circ = 3\angle 0^\circ V$$

$$\dot{U}_L = jX_L\dot{I} = 160 \times 0.1\angle(0^\circ + 90^\circ) = 16\angle 90^\circ V$$

$$\dot{U}_L = -jX_C \dot{I} = 200 \times 0.1 \angle (0^\circ - 90^\circ) = 20 \angle -90^\circ \text{ V}$$

相量图如图6.3.1d) 所示:

$$u_R(t) = 3\sqrt{2} \sin(\omega t) \text{ V}$$

$$u_L(t) = 16\sqrt{2} \sin(\omega t + 90^\circ) \text{ V}$$

$$u_C(t) = 20\sqrt{2} \sin(\omega t - 90^\circ) \text{ V}$$

$$i(t) = 0.1\sqrt{2} \sin(\omega t) \text{ A}$$

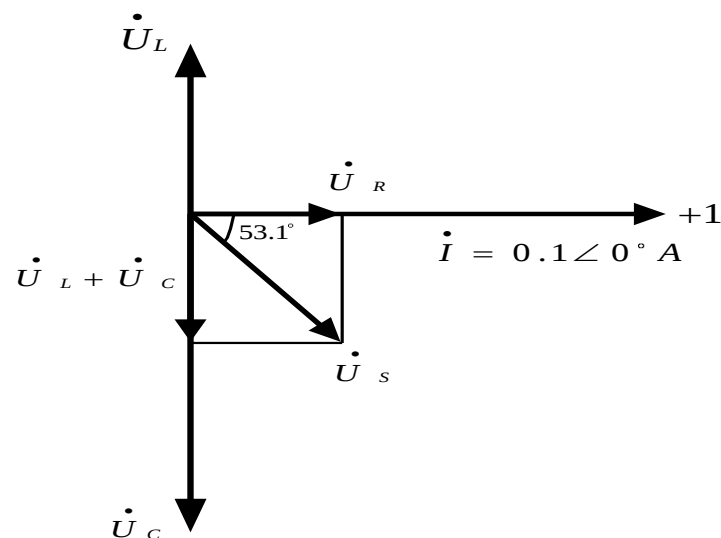


图6.3.1d) 例1的电压电流相量图

从以上分析和相量图可以看出电路呈容性，端口电压滞后端口电流 53.1° 。

6.3.2复导纳，复阻抗与复导纳的关系 G, C, L并联电路的复导纳

1、复导纳

在直流电路中，当R元件电压电流方向相关联时有 $R = \frac{U}{I}$ ，

而 $\frac{I}{U} = \frac{1}{R} = g$ ，g为电导，具有倒电阻的量纲姆欧，或西门

子S。

在正弦稳态分析中，当Z上的电压，电流方向相关联时 $\dot{U} = Z \dot{I}$ ，

$\therefore Z = \frac{\dot{U}}{\dot{I}}$ ，而 $\frac{1}{Z} = \frac{\dot{I}}{\dot{U}}$ ， $\frac{1}{Z}$ 也有同样具有倒电阻的量纲姆

欧，或西门子S。

$$\frac{1}{Z} = Y \quad 6-3-2 \quad (1) \quad \text{式 表示复导纳}, Y = \frac{\dot{I}}{\dot{U}} \quad 6-3-2 \quad (2)$$

式，Y也是一复数。同样可以表示为 $Y = G + jB$ 6-3-2 (3)

式 或 $Y = |Y| \angle \theta$ 6-3-2 (4) 式

$$Y = |Y| \angle \theta = \frac{1}{|Z| \angle \varphi} = \frac{1}{|Z|} \angle -\varphi$$

$$\therefore |Y| = \frac{1}{|Z|}, \quad \theta = -\varphi \quad 6-3-2 \quad (5)$$

$\therefore$ 当电流呈感性时 $\varphi > 0$ ，由 $\theta = -\varphi$ 可知，此时电路如果用复导纳表示，则 $\theta < 0$ 。

$$Y = G + jB = \frac{1}{R + jX} = \frac{R - jX}{R^2 + X^2} = \frac{R}{R^2 + X^2} + j \frac{-X}{R^2 + X^2}$$

可见

$$G = \frac{R}{R^2 + X^2} \quad B = \frac{-X}{R^2 + X^2}$$

其中 $\therefore X$ 是 w 的函数。
 $\therefore B, G$ 均是 w 的函数。

2、G, C, L并联电路的复导纳

在图6.3.2a) 中

$$\dot{I} = \dot{I}_G + \dot{I}_C + \dot{I}_L = G\dot{U}_G + j\omega C\dot{U}_C + \frac{1}{j\omega L}\dot{U}_L$$

而 $\dot{U}_G = \dot{U}_C = \dot{U}_L = \dot{U}$

所以 $\dot{I} = (G + j\omega C - j\frac{1}{\omega L})\dot{U}$

$$Y = \frac{\dot{I}}{\dot{U}} = G + j\omega C - j\frac{1}{\omega L} \quad 6-3-2 \quad (6)$$

所以，在G,C,L并联电路中

$$Y = G + j(\omega C - \frac{1}{\omega L}) = G + jB \quad \text{其中 } B = \omega C - \frac{1}{\omega L};$$

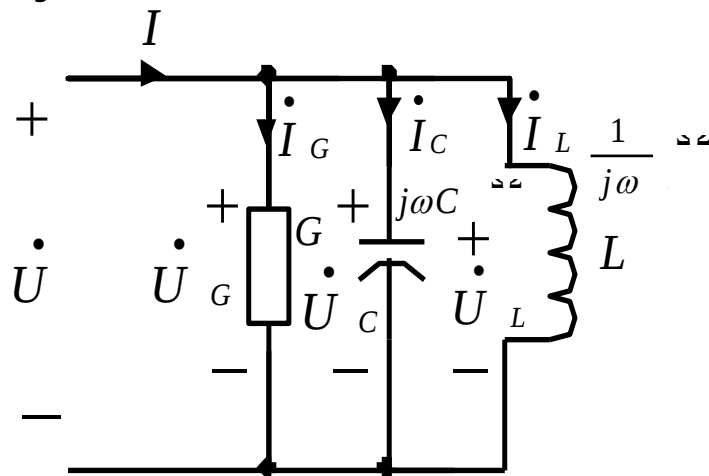


图 6.3.2a) G,C,L三元件并联

$\therefore \omega C = B_C$ 称为容纳，与频率 ω 成正比。

$\frac{1}{\omega L} = B_L$ 称为感纳，与频率 ω 成反比。

$B_C \sim \omega, B_L \sim \frac{1}{\omega}$ 的曲线见图6.3.2b)。

6.4简单正弦电路的稳态分析

由于正弦时间函数采用了相量以后基氏两定律还是适用。
线性定常 R, L, C 三元件采用了相量模型以后欧姆定律也能应用。
因此，采用了相量法后，直流电路中所有方法及
网络定理也都能运用，只要把 $i(t) \rightarrow \dot{I}_m$
或 $\dot{I}$, $u(t) \rightarrow \dot{U}_m$ 或 $\dot{U}$ 。支路模型用 Y
或 Z 表示即可。若有几个复阻抗相串连
，由于 $\dot{I}$ 相同， $\dot{U} = \sum_{k=1}^n \dot{U}_k = \sum_{k=1}^n Z_k \dot{I} = Z \dot{I}$ ，可见
$$Z = \sum_{k=1}^n Z_k \quad \circ$$

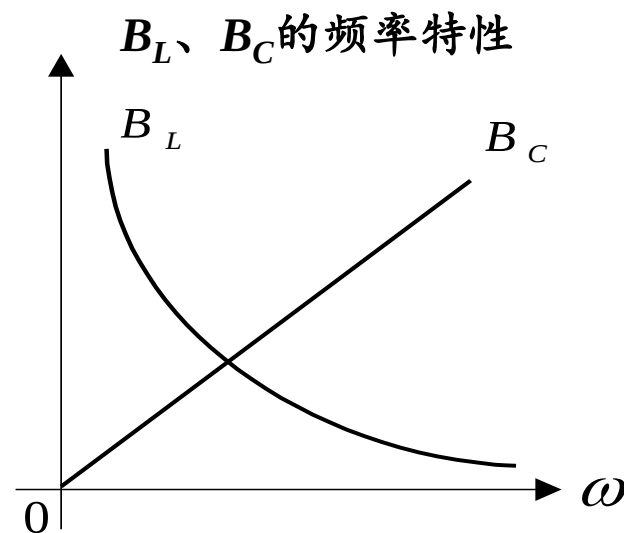


图6.3.2b) B_L 、 B_C 与 ω 的关系曲线

例2.图6.4.1a)中已知正弦

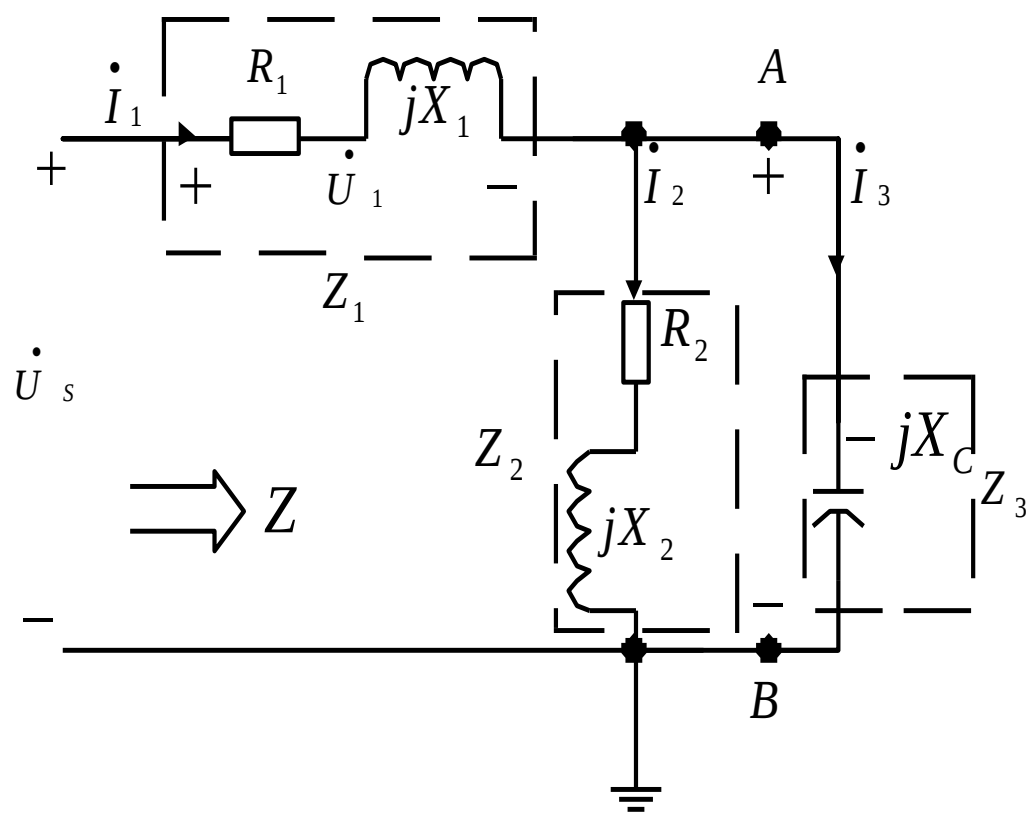
电压的有效值 $U_s = 220V$, $R_1 = 5\Omega$

$X_1 = 10\Omega$, $R_2 = 30\Omega$, $X_2 = 40\Omega$

$X_c = 50\Omega$ 。求电流相量 $\dot{I}_1$

$\dot{I}_2$, $\dot{I}_3$; 电压相量 $\dot{U}_1$

$\dot{U}_{AB}$, 并画出相量图。



图(6.4.1a)例2的电路图

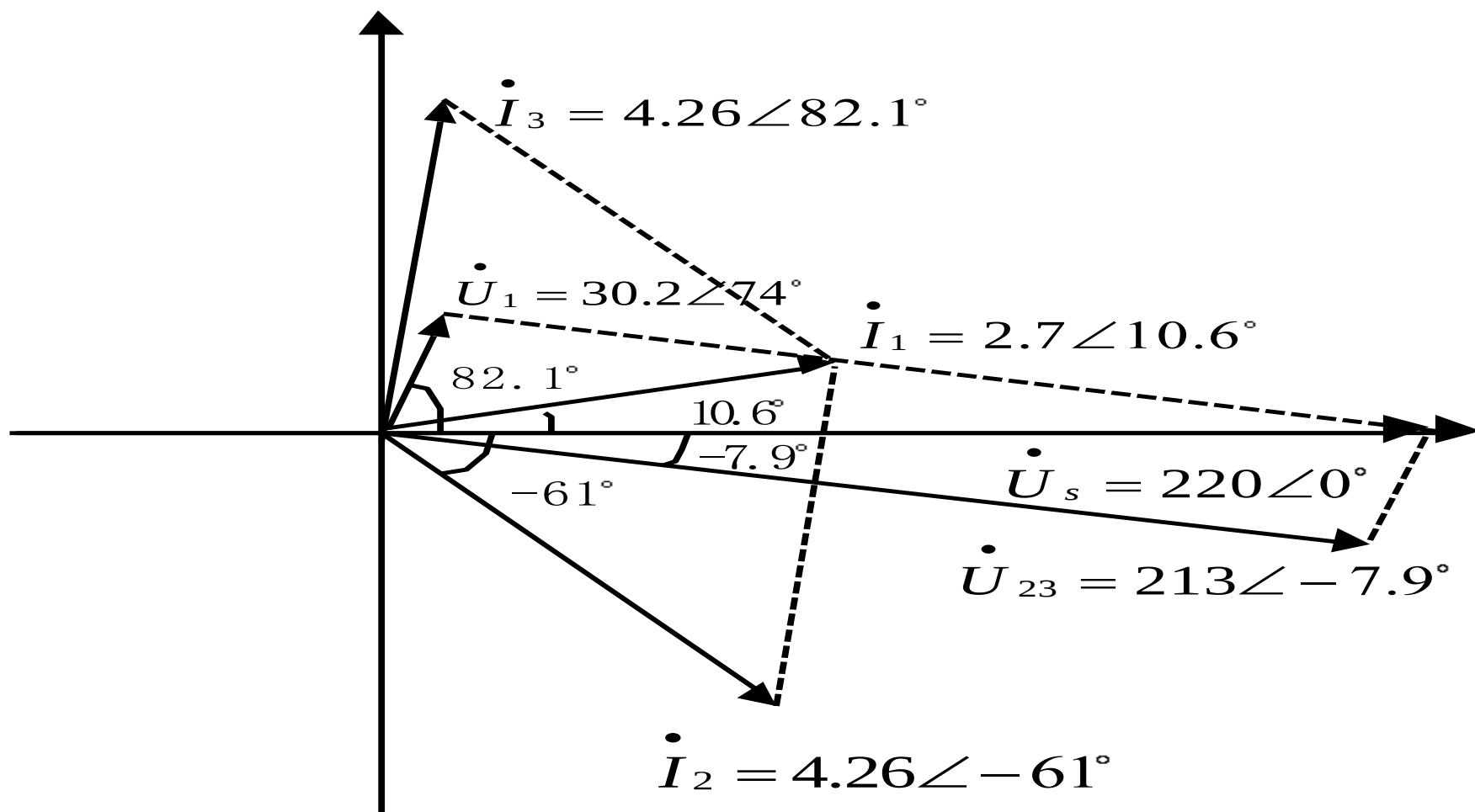
• 方法一：

解：令 $Z_1 = R_1 + jX_1 = 5 + j10 = 11.2 \angle 63.4^\circ \Omega$

$$Z_2 = R_2 + jX_2 = 30 + j40 = 50 \angle 53.1^\circ \Omega$$

$$Z_3 = -jX_C = -j50 \Omega$$

$$Z_{23} = Z_2 // Z_3 = \frac{Z_2 \cdot Z_3}{Z_2 + Z_3} = \frac{50 \angle 53.1^\circ \times 50 \angle -90^\circ}{30 + j40 - j50} = 79 \angle -18.5^\circ \Omega$$



图(6.4.1b)例2的向量图

$$Z = Z_1 + Z_{23} = 5 + j10 + 79\angle -18.5^\circ = 5 + j10 + 75 - j25 = 80 - j15 = 81.4\angle -10.6^\circ \Omega$$

$$\dot{U}_S = 220\angle 0^\circ \quad (\text{设 } \varphi_u = 0^\circ \text{ 即将 } \dot{U}_S \text{ 作为参考向量})$$

$$\dot{I}_1 = \frac{\dot{U}_S}{Z} = \frac{220\angle 0^\circ}{81.4\angle -10.6^\circ} = 2.7\angle 10.6^\circ \text{ A}$$

可见整个电路呈容性。

$$\dot{I}_2 = \dot{I}_1 Z_{23} \frac{1}{Z_2} = \frac{2.7\angle 10.6^\circ \times 79\angle -18.5^\circ}{50\angle 53.1^\circ} = \frac{213\angle -7.9^\circ}{50\angle 53.1^\circ} = 4.26\angle -61^\circ \text{ A}$$

$$\dot{I}_3 = \dot{I}_1 Z_{23} \frac{1}{Z_3} = \frac{213\angle -7.9^\circ}{-j50} = 4.26\angle 82.1^\circ \text{ A}$$

$$\dot{U}_1 = \dot{I}_1 Z_1 = 2.7 \angle 10.6^\circ \times 11.2 \angle 63.4^\circ = 30.2 \angle 74^\circ \text{V}$$

$$\dot{U}_{23} = \dot{I}_1 Z_{23} = 2.7 \angle 10.6^\circ \times 79 \angle -18.5^\circ = 213 \angle -7.9^\circ \text{V}$$

相量图见图(6.4.1b)。

方法二：

用节点电位法，令B点为参考电位点，该电路独立节点只有一个即A点。

$$\left(\frac{1}{Z_1} + \frac{1}{Z_2} + \frac{1}{Z_3} \right) \dot{U}_A = \frac{\dot{U}_S}{Z_1}$$

代入参数后有

$$\left(\frac{1}{112 \angle 63.4^\circ} + \frac{1}{50 \angle 53.1^\circ} + \frac{1}{-j50} \right) \dot{U}_A = \frac{220 \angle 0^\circ}{11.2 \angle 63.4^\circ}$$

解出 $\dot{U}_A \doteq 212\angle -7.8^\circ \text{V} \doteq 213\angle -7.9^\circ \text{V}$

$\dot{U}_A$ 即 $\dot{U}_{23}$

$$\dot{I}_3 = \frac{\dot{U}_A}{Z_3} = \frac{212\angle -7.8^\circ}{50\angle -90^\circ} = 4.23\angle 82.2^\circ \text{A}$$

与解法一结果相同

解法三：

网孔法，将电路图重画如下，设网孔电流 $\dot{I}_{m1}$, $\dot{I}_{m2}$ 如图

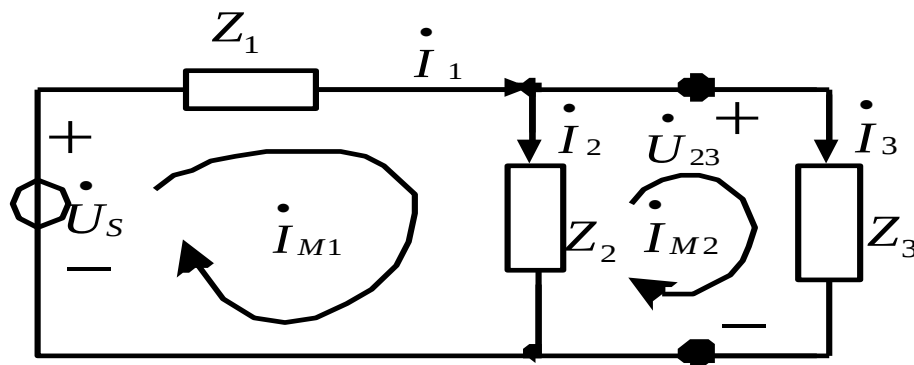


图 (6.4.1a)例2的电路图

可知 $\dot{I}_{m1} = \dot{I}_1$ $\dot{I}_{m2} = \dot{I}_3$ $\dot{I}_2 = \dot{I}_{m1} - \dot{I}_{m3}$ **列网孔方程:**

$$\begin{cases} (Z_1 + Z_2) \dot{I}_{M_1} - Z_2 \dot{I}_{M_2} = \dot{U}_S \\ -Z_2 \dot{I}_{M_1} + (Z_2 + Z_3) \dot{I}_{M_2} = 0 \end{cases}$$

其中 $Z_1 + Z_2 = 5 + j10 + 30 + j40 = 35 + j50 = 61\angle 55^\circ \Omega$

$Z_2 + Z_3 = 30 + j40 - j50 = 30 - j10 = 31.62\angle -18.4^\circ \Omega$

还是设 $\dot{U}_S$ 为参考相量, 即 $\dot{U}_S = 220\angle 0^\circ \text{V}$, 代入网孔方程组

$$\begin{cases} 61\angle 55^\circ \dot{I}_{M_1} - 50\angle 53.1^\circ \dot{I}_{M_2} = 220\angle 0^\circ \\ -50\angle 53.1^\circ \dot{I}_{M_1} + 31.62\angle -18.4^\circ \dot{I}_{M_2} = 0 \end{cases}$$

解之得 $\dot{I}_{M_2} = 4.3\angle 82.2^\circ \text{A} = \dot{I}_3$

结果与前面两种解法结果相同。

6.5 正弦稳态电路的功率

6.5.1 瞬时功率

有任一无源二端元件或无源二端网络 (Z) 其上的电压 $u(t)$ 与电流 $i(t)$ 方向相关联如图(6.5.1a)所示。则其瞬时功率 $P(t) = u(t) \cdot i(t)$

若 $i(t) = \sqrt{2}I \sin \omega t$ $u(t) = \sqrt{2}U \sin(\omega t + \varphi)$

则
$$\begin{aligned} P(t) &= u(t) \cdot i(t) = \sqrt{2}U \sin(\omega t + \varphi) \cdot \sqrt{2}I \sin \omega t \\ &= 2UI \left[\frac{\cos(\omega t + \varphi - \omega t) - \cos(\omega t + \varphi + \omega t)}{2} \right] \\ &= UI [\cos \varphi - \cos(2\omega t + \varphi)] \\ &= UI \cos \varphi - UI \cos(2\omega t + \varphi) \end{aligned}$$

↑ ↑

恒定分量 二倍频变化的简谐分量

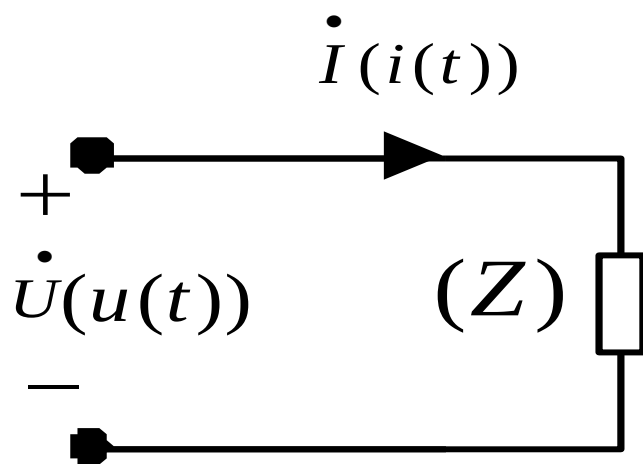


图 (6.5.1a)

电压 $u(t)$ ，电流 $i(t)$ 及功率 $P(t)$ 的波形图如图(6.5.1b)。从解析式及波形图均可以看出：

$P(t)$ 的变化频率是 $u(t)$ 或 $i(t)$ 的两倍。其中包含了恒定分量 $UI \cos \varphi$ 和二倍频变化的余弦函数 $UI \cos(2\omega t + \varphi)$ 。

$u(t)$ 和 $i(t)$ 同为正值，或 $u(t)$ 和 $i(t)$ 同为负值时 $P(t) > 0$ 否则 $P(t) < 0$ （如横轴下部阴影部分）。

说明在电路中有能量往返交换现象存在。

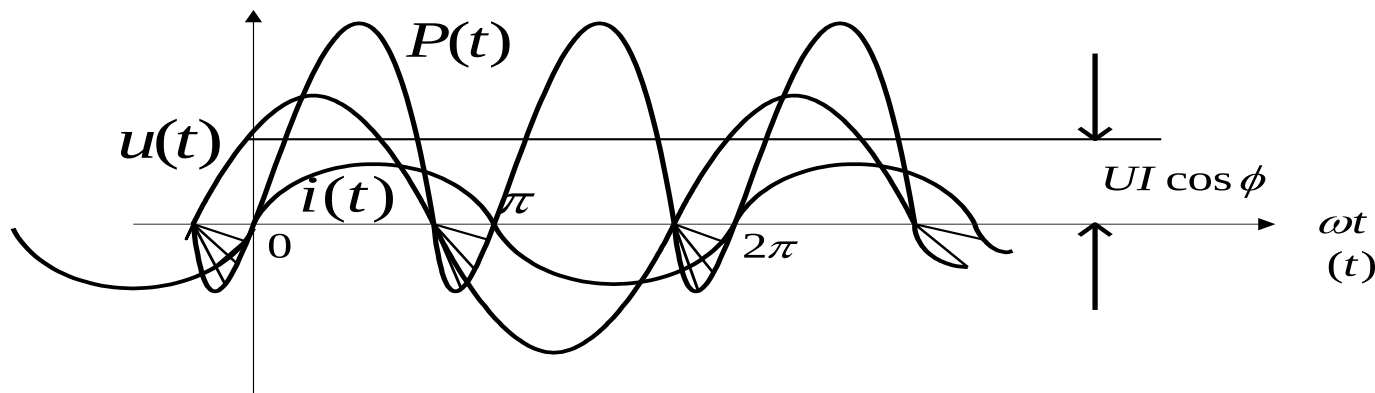
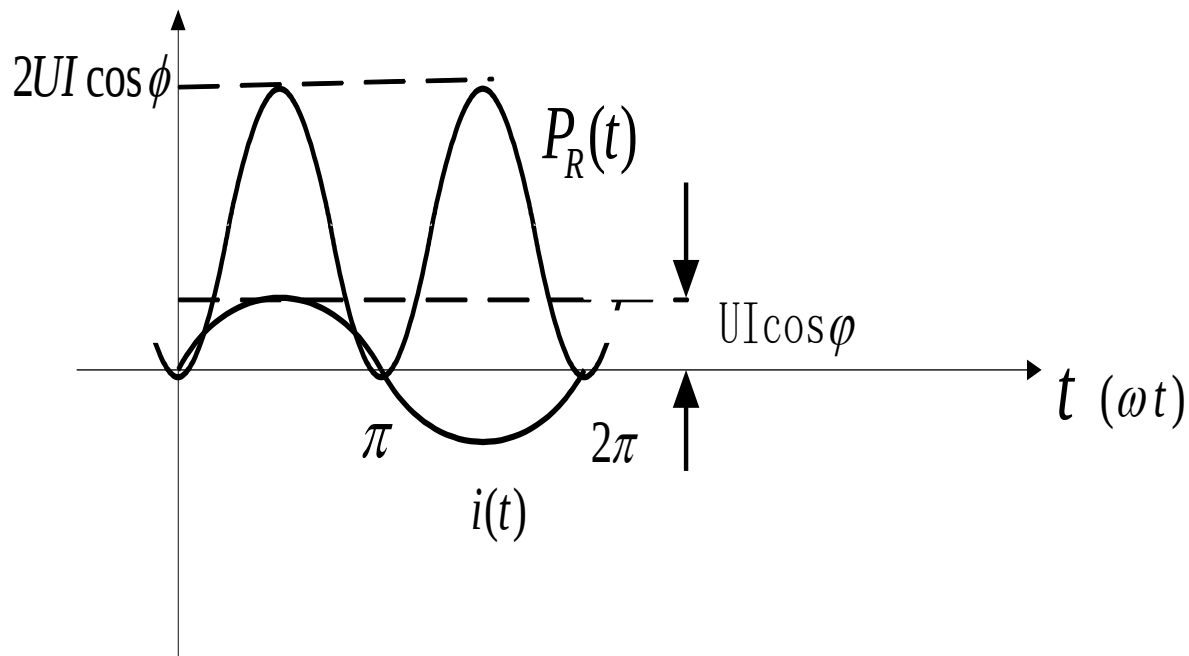
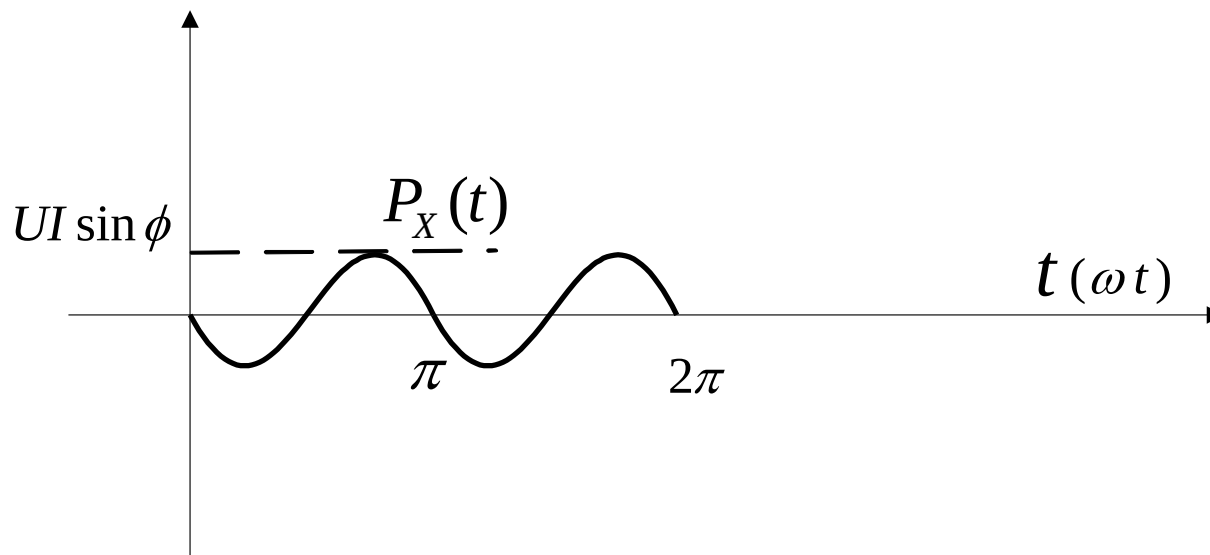


图 (6.5.1b) $u(t), i(t), P(t)$ 曲线



图(6.5.1c) $P(t)$ 的有功分量曲线



图(6.5.1d) $P(t)$ 的无功分量曲线

$P(t) > 0$ 表明电源往电路输送能量。

$P(t) < 0$ 表明电路将能量释放出来返回电源。

但是由于 $R \neq 0$ ，所以在往返交换过程中，在 R 上被吸收消耗了一部分。所以从电源输送给电路的能量总比电路返回给电源的能量多（曲线上半部分面积大于下半部面积）。

另外 $P(t)$ 也可以写成下面的形式：

$$\begin{aligned} P(t) &= UI \cos \varphi - [UI \cos 2\omega t \cos \varphi - UI \sin 2\omega t \sin \varphi] \\ &= UI \cos \varphi - UI \cos \varphi \cos 2\omega t + UI \sin \varphi \sin 2\omega t \\ &= UI \cos \varphi [1 - \cos 2\omega t] + UI \sin \varphi \sin 2\omega t \end{aligned}$$

由于 $|\cos 2\omega t| \leq 1$

$\therefore UI \cos \varphi [1 - \cos 2\omega t] \geq 0$

曲线恒处于横轴上方。

$\therefore$ 令 $UI \cos \varphi [1 - \cos 2\omega t] = P_R(t)$ 称为瞬时功率中的有功分量如图 6.5.1c) 所示。该项只有大小的变化而不改变传输方向。其0值与 $\cos \varphi$ 的0值同时出现，极大值 $2UI \cos \varphi$ 的正负极大值同时出现。表示耗能速率的分量

第二项 $UI \sin \varphi \sin 2\omega t$ 是一个二倍频率变化的正弦函数。在一周内的积分值恒等于0。表明电路吸收的功率和返回的功率相等。因此该分量表明了电路中能量往返交换的速率是瞬时功率的无功分量，用 P_X (表示如图6.5.1d) 所示。

6.5.2平均功率

将瞬时功率 $P(t)$ 取一周期内的平均值，用 $\underline{P}$ 表示。

$$\begin{aligned} P &= \frac{1}{T} \int_0^T P(t) dt \\ &= \frac{1}{T} \int_0^T \{UI \cos \varphi [1 - \cos 2\omega t'] + UI \sin \varphi \sin 2\omega t'\} dt' \\ &= UI \cos \varphi \end{aligned}$$

$UI \cos \varphi$ 恰好是瞬时功率 $P(t)$ 中的恒定分量也是瞬时功率 $P(t)$ 中的有功分量 $P_R(t)$ 的平均值。所以平均功率更多时候叫做有功功率。

∴ **有功功率** $P = UI \cos \varphi$ **6-5-2式**，单位为**瓦特**，简称瓦（W）， 10^3 瓦称为千瓦（KW）， 10^6 瓦为兆瓦（MW）。

U ， I 分别为这一支路的电压电流的**有效值**， φ 为电压电流的**相位差角**，也是这段支路复阻抗的**阻抗角**。 $|\cos \varphi| \leq 1$ ，所以 $\cos \varphi$ 称为**有功功率因数**，用 Pf 表示，即功率因数 $Pf = \cos \varphi$

6.5.3无功功率

相对于 $UI \cos \varphi = P$ 称为有功功率而言，无功分量 $UI \sin \varphi \sin 2\omega t$ 的振幅 $UI \sin \varphi$ 称为**无功功率**。 $UI \sin \varphi$ 用 Q 表示。即：无功功率 $Q = UI \sin \varphi$ ，单位为（**VAR**）乏，千乏，兆乏。

无功功率 Q 表明了电路中能量往返交换的大小。 $\sin \varphi$ 称为**无功功率因数**。

6.5.4视在功率

$P = UI \cos \varphi$, $Q = UI \sin \varphi$, 其中 UI 是支路或端口的电压电流有效值的乘积用 S 表示, $S = UI$ 6-5-4式, 称为**视在功率**, 单位为(VA) 伏安, 千伏安, 兆伏安。视在功率 既是一个计算量, 也有其实用意义。 U , I 一般是指设备的额定电压, 额定电流有效值(即设备在一定条件下安全运行的最大电压, 电流有效值)。发电机, 变压器铭牌上标志出 U , I 只告诉发出最大电压有效值, 最大电流有效值, 其发出的有功功率的最大值。至于具体发出的有功功率要由与之相联的外电路(负载)的功率因数来确定。

若外电路为电阻性器件, 如灯泡, 电炉, 则 $\cos \varphi = 1, \therefore P = S = UI$

若外电路为电感性或电容性 $|\cos \varphi| \neq 1, \therefore P = S \cos \varphi < S$

例如：某发电机发出的视在功率 $S = 10^3$ 千伏安，与之相联的负载 Z_1 的功率因素 $Pf_1 = 0.85$ ，则该负载从发电机获得的有功功率为 $P_1 = S \cos \varphi_1 = 10^3 \times 10^3 \times 0.85 = 850$ 千瓦；另一负载的功率因数 $Pf_2 = 0.7$ $P_2 = S \cos \varphi_2 = 10^6 \times 0.7 = 700$ 千瓦。

6.5.5复功率

$$P = UI \cos \varphi \quad Q = UI \sin \varphi \quad S = UI \quad \therefore \sqrt{P^2 + Q^2} = S$$

由 P , Q , S 可以组成 Δ , 该 Δ 称为功率 Δ_Q , 见图6.5.2a), 将 S 作斜边, P , Q 分别为两直角边, 由于功率因数角为 φ 角, 即电压超前电流的相位角, 也是阻抗角。

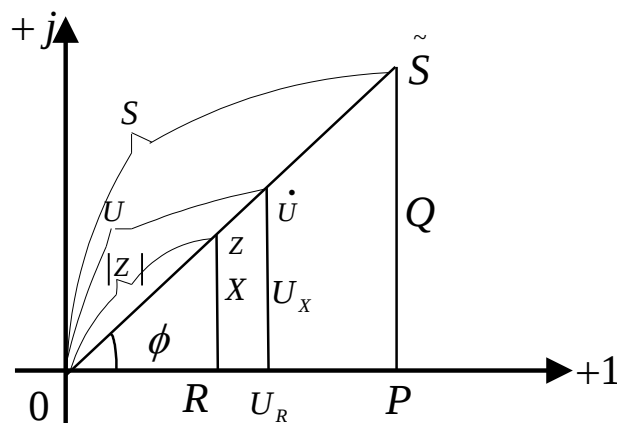


图 6.5.2a) 功率三角形, 电压三角形, 阻抗三角形是相似三角形

如果将功率三角形置于复平面上, 则 P, Q, S 之间的关系又可以用复数 $\tilde{S}$ 来表示, $\tilde{S} = P + jQ$, $\tilde{S}$ 是一个辅助计算量, 称为复功率, $\tilde{S} = S \angle \varphi$, $\tilde{S}$ 的单位与 S 相同。

$$\tilde{S} = P + jQ = S \angle \varphi \quad \mathbf{6-5-5 (1) 式}$$

$$\tilde{S} = P + jQ = \sqrt{P^2 + Q^2} \angle \tan^{-1} \frac{Q}{P} = UI \angle (\varphi_u - \varphi_i) = U \angle \varphi_u \cdot I \angle -\varphi_i$$

$$\dot{I} = I \angle \varphi_i \quad \therefore I \angle -\varphi_i = \dot{I}^* \quad \therefore \tilde{S} = \dot{U} \cdot \dot{I}^* \quad \mathbf{6-5-5 (2) 式}$$

$$\therefore \dot{U} = Z \dot{I}$$

$$\therefore \tilde{S} = \dot{U} \dot{I}^* = Z \dot{I} \dot{I}^* = (R + jX) I^2 = RI^2 + jXI^2 = U_R I + jU_X I = P + jQ \quad \mathbf{6-5-5 (3)}$$

可见 $\Delta_{\text{功率}} \approx \Delta_{\text{电压}} \approx \Delta_{\text{阻抗}}$

$$\text{又 } \because \dot{I} = Y \dot{U} \quad \therefore \dot{I}^* = Y^* \dot{U}^*$$

$$\therefore \tilde{S} = \dot{U} \cdot Y^* \dot{U}^* = U^2 Y^* = (G - jB)U^2 = GU^2 + j(-B)U^2 \quad 6-5-5 \quad (4)$$

可见计算可以用 $P = UI \cos \varphi$, $P = S \cos \varphi$, $P = RI^2$, $P = GU^2$ **等。**

同理 $Q = UI \sin \varphi$ $Q = S \sin \varphi$ $Q = XI^2$ $Q = -BU^2$

从以上公式的推导可以进一步理解 $\tilde{S}$ 不是相量，因为它不对应于任何时间函数。 $\tilde{S}$ 只是一个辅助的计算量。在画 P,Q,S 功率三角形时，P 因为是正值电阻 $R_{\text{等}}$ 上的功率。所以 $P > 0$ 在正实轴上取，而 Q 可正可负。

例3 有电路如图6.5.3, $R = 20\Omega$, $L = 20 \times 10^{-3}H$, 电压源电压有效值 $U = 100V$, 频率 $f = 50Hz$, 求: P , Q , $S, \cos \varphi$ 。

**解: 设电流 $\dot{I}$ 与 $\dot{U}$ 方向关联如图所示,
设 $\dot{U}$ 为参考向量**

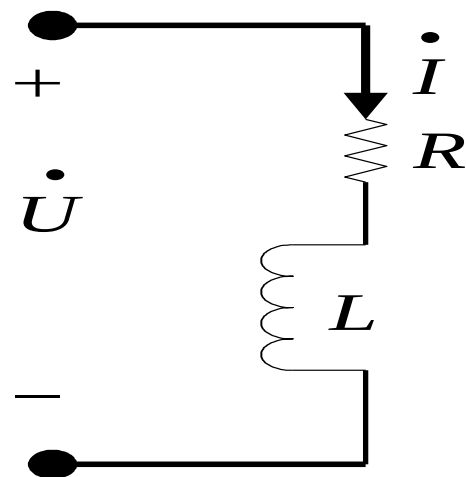


图6. 5. 5例3电路

$$\dot{U} = U \angle 0^\circ V$$

$$Z = R + j\omega L = 20 + j2\pi \times 50 \times 20 \times 10^{-3} = 20 + j6.28 = 20.96 \angle 17.43^\circ$$

$$\dot{I} = \frac{\dot{U}}{Z} = \frac{100 \angle 0^\circ}{20.96 \angle 17.4^\circ} = 4.77 \angle -17.43^\circ$$

$$S = UI = 100 \times 4.77 = 477 \text{ 伏安}$$

$$P = S \cos \varphi = 477 \times \cos 17.43 = 477 \times 0.954 = 454 \text{ 瓦}$$

$$Q = S \sin \varphi = 477 \times \sin 17.43 = 477 \times 0.3 = 143 \text{ 乏}$$

$$\cos \varphi = \cos 17.43^\circ = 0.954$$

例4. 某交流电动机接在220V(有效值),50周/秒的正弦电压上,当正常运行时测得其有功功率为7.5千瓦,无功功率为5.5千乏,求其功率因数,若以电阻和电抗(感抗)作为它的等效电路,求 R 和 X 的值。

解: $P = 7.5 \times 10^3$ 瓦 $Q = 5.5 \times 10^3$ 乏

$$\therefore S = \sqrt{P^2 + Q^2} = \sqrt{7.5^2 + 5.5^2} \times 10^3 = 9.3 \times 10^3 \text{ 伏安}$$

$$\text{pf} = \cos \varphi = \frac{P}{S} = \frac{7.5 \times 10^3}{9.3 \times 10^3} = 0.806 \quad \varphi = 36.29^\circ$$

$$\because P = UI \cos \varphi \quad U = 220V$$

$$\therefore I = \frac{P}{U \cos \varphi} = \frac{7.5 \times 10^3}{220 \times 0.806} = 42A$$

$$|Z| = \frac{U}{I} = \frac{220}{42} = 5.2 \Omega$$

$$R = |Z| \cos \varphi = 5.2 \times 0.806 = 4.19 \Omega$$

$$X = |Z| \sin \varphi = 5.2 \times 0.592 = 3.18 \Omega$$

6.5.6 功率守恒定理

例3. 有电路如图 6.5.4。输入电压向量是 $\dot{U}_1 = \sqrt{2}\angle 0^\circ$ ， $Z_1 = j2\Omega$ ， $Z_2 = -j1\Omega$ ， $Z_3 = j1\Omega$ ， $Z_4 = 1\Omega$ 。求：输出电压 $\dot{U}_2$ ，电压源发出的复功率及电路中各支路的复功率。

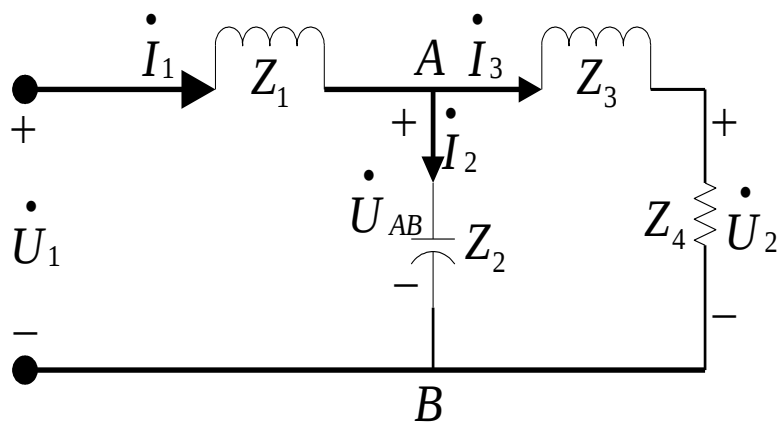


图 6.5.4 例 4 电路图

解： $Z_3 + Z_4 = j1 + 1 = \sqrt{2}\angle 45^\circ \Omega \doteq Z_{34}$

Z_2 和 Z_{34} 并联的等效复阻抗：

$$Z_{AB} = \frac{Z_2(Z_3 + Z_4)}{Z_2 + (Z_3 + Z_4)} = \frac{-j1 \cdot \sqrt{2}\angle 45^\circ}{-j1 + (j1 + 1)} = \sqrt{2}\angle -45^\circ = 1 - j\Omega$$

输入端口的等效复阻抗 $Z = Z_1 + Z_{AB} = j2 + (1 - j1) = 1 + j1 = \sqrt{2} \angle 45^\circ \Omega$

$$\therefore \dot{I}_1 = \frac{\dot{U}_1}{Z} = \frac{\sqrt{2} \angle 0^\circ}{\sqrt{2} \angle 45^\circ} = 1 \angle -45^\circ \text{ A}$$

$$\dot{U}_{AB} = \dot{I}_1 \times Z_{AB} = 1 \angle -45^\circ \times \sqrt{2} \angle -45^\circ = \sqrt{2} \angle -90^\circ \text{ V}$$

$$\dot{I}_2 = \frac{\dot{U}_{AB}}{Z_2} = \frac{\sqrt{2} \angle -90^\circ}{1 \angle -90^\circ} = \sqrt{2} \angle 0^\circ \text{ A}$$

$$\dot{I}_3 = \frac{\dot{U}_{AB}}{Z_{34}} = \frac{\sqrt{2} \angle -90^\circ}{\sqrt{2} \angle 45^\circ} = 1 \angle -135^\circ \text{ A}$$

$$\dot{U}_2 = \dot{I}_3 \times Z_4 = 1 \angle -135^\circ \times 1 = 1 \angle -135^\circ \text{ V}。$$

除电源外，全电路的复功率 $\tilde{S}_{\text{吸}} = Z \cdot I_1^2 = \sqrt{2} \angle 45^\circ \cdot 1^2 = \sqrt{2} \angle 45^\circ = 1 + j1$ 伏安

$\therefore$ 全电路吸收的有功功率 $P = 1\text{W}$ ，无功功率 $Q = 1 \text{ VAR}$

电源发出的复功率 $\tilde{S}_{\text{吸}} = -\dot{U}_1 I_1^* = -\sqrt{2}\angle 0^\circ \cdot 1\angle 45^\circ = -\sqrt{2}\angle 45^\circ = -1 + j(-1)$

$\therefore \tilde{S}_{\text{吸}} + \tilde{S}_{\text{发}} = 1 + j1 - 1 - j1 = 0$ 电路的复功率平衡。

一般表达式为 $\sum \tilde{S} = 0$ 。 6-5-6 (1)

$P_{\text{吸}} + P_{\text{发}} = 1 - 1 = 0$ 电路的有功功率平衡。

一般表达式为 $\sum P = 0$ 。 6-5-6 (2)

同理 $Q_{\text{吸}} + Q_{\text{发}} = j1 - j1 = 0$ 电路的无功功率频率平衡。

一般表达式为 $\sum Q = 0$ 。 6-5-6 (3)

$$Z_1 \text{ 支路: } \tilde{S}_1 = Z_1 I_1^2 = j2 \times 1^2 = j2 \text{ 伏安}$$

$$Z_2 \text{ 支路: } \tilde{S}_2 = Z_2 I_2^2 = -j1 \times \sqrt{2}^2 = -j2 \text{ 伏安}$$

$$Z_{34} \text{ 支路: } \tilde{S}_3 = (Z_3 + Z_4) I_3^2 = (j1 + 1) \cdot 1^2 = 1 + j1 \text{ 伏安}$$

$$\text{所有无源支路的复功率 } \tilde{S}_1 + \tilde{S}_2 + \tilde{S}_3 = j2 - j2 + 1 + j1 = 1 + j1 = \tilde{S}_{\text{吸}}$$

$$\therefore \text{电路吸收的复功率等于各支路吸收的复功率的总和, } \tilde{S}_{\text{吸}} = \sum_{k=1}^n \tilde{S}_{k\text{吸}} \quad 6-5-6 \quad (4)$$

例 6.两负载相并联，一个负载是电感性，功率因数 $\cos\varphi_1 = 0.6$ ，消耗功率 90 千瓦，另一负载由纯电阻组成消耗功率 70 千瓦。问合成功率因数是多少？

解：由功率守恒定理可知，电路吸收的总有功功率 $P = P_1 + P_2$

$$\therefore P = 90 \times 10^3 + 70 \times 10^3 = 160 \times 10^3 \text{ 瓦}$$

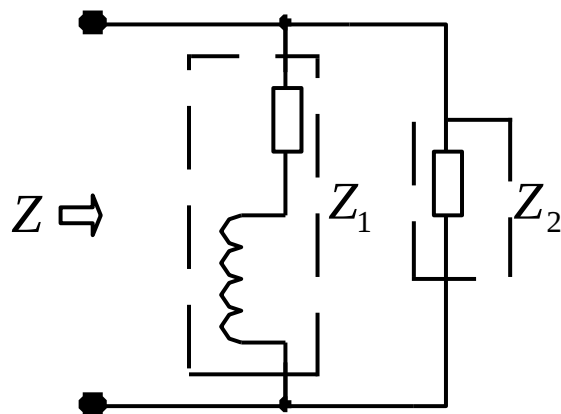


图 6.5.5 例 6 的电路图

$$\text{同理 } Q = Q_1 + Q_2$$

$$Q_1 = P_1 \tan \varphi_1 ; \quad \because \cos \varphi_1 = 0.6 \quad \therefore \varphi_1 = 53.1^\circ \quad \therefore$$

$$Q_1 = 90 \times 10^3 \times \tan 53.1^\circ = 120 \times 10^3 \text{ 乏}$$

$$Q_2 = 0$$

$$\therefore Q = Q_1 = 120 \times 10^3 \text{ 乏}$$

$$\tan \varphi = \frac{Q}{P} = \frac{120 \times 10^3}{160 \times 10^3} = \frac{3}{4} \quad \therefore \varphi = 36.9^\circ$$

$$pf = \cos \varphi = \cos 36.9^\circ = 0.8。$$

返回

上页

下页

6.6提高功率因数

1.为什么要提高功率因数

设备的视在功率 $S = UI$ 一方面表示了设备的额定电压，
额定电流，另一方面也表示了设备的容量，即往外发出有
功功率的最大值。如一台变压器其容量为 $S = 10 \times 10^3$ 伏安，
如果接电阻性负载设备则 $P = S \cos 0^\circ = S = 10 \times 10^3$ 瓦，如果
接感性或容性负载 $|\cos \varphi| < 1$ 。 $\therefore P < S$ ， $|\cos \varphi|$ 越小， P 越
小， $|\cos \varphi|$ 越大， P 越大，发电设备的容量便能得到较充分的
利用。前面已经举例

$$\cos \varphi_1 = 0.85, P_1 = 0.85 \times 10 \times 10^3 = 850 \times 10^3 \text{ 瓦}$$

$$\cos \varphi_2 = 0.7, P_2 = 0.7 \times 10 \times 10^3 = 700 \times 10^3 \text{ 瓦}$$

另外，对同一负载来说 $P = UI \cos \varphi$ 。当 P, U 均为定值时， I 与 $\cos \varphi$ 成反比。而在保证负载的额定电压 U ，额定功率 P 的同时，发电方总是希望 I 越小越好，因为 I 越小在线路上的功率损失和电压损失就越小。设线路阻抗

$Z_l = R_l + jX_l$ ， $P_l = R_l I^2$ ， $U_l = |Z_l| I$ 。可见不管从充分利用发电设备的容量还是从减小线路的功损，电压损，都希望提高功率因数。

2. 如何提高功率因数。

以日关灯为例，日关灯使用时一般要串联镇流器，镇流器是电感元件，因而电路为感性电路，电压与电流之间出现相位差角 $\varphi \neq 0$ ， $\therefore \cos \varphi \neq 1$ ，感性电路一般并联电容，使得端口上

电压与电流之间的相位差角变小, $\varphi' < \varphi$, $\cos \varphi' > \cos \varphi$ 。见图6.6.1, 以 $\dot{U} = U \angle 0^\circ \text{V}$, 画相量图6.6.2。原 $R + j\omega L$ 支路为感性, $\therefore \dot{I}$ 滞后于 $\dot{U}$ φ 角。

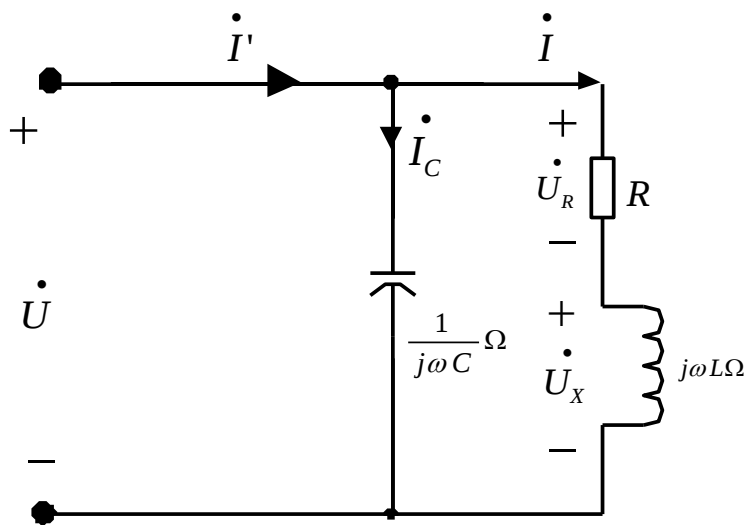


图 6.6.1 感性电路并联电容以提高功率因数

将 $\dot{I}$ 分解为水平分量和垂直分量, 水平分量与 $\dot{U}$ 重合于水平轴, 与 $\dot{U}$ 无相位差, 是构成有功功率的分量, 称为电流的有功分量, 用 $\dot{I}_R$ 表示, 垂直分量与 $\dot{U}$ 成 90° 角不能构成有功功率, 故 $\dot{I}$ 称为的无功分量用 $\dot{I}_{XL}$ 表示。

并联电容支路后电容电流 $\dot{I}_C$ 超前于 $\dot{U}$ 90° 。与 $\dot{I}_{XL}$ 反相，若

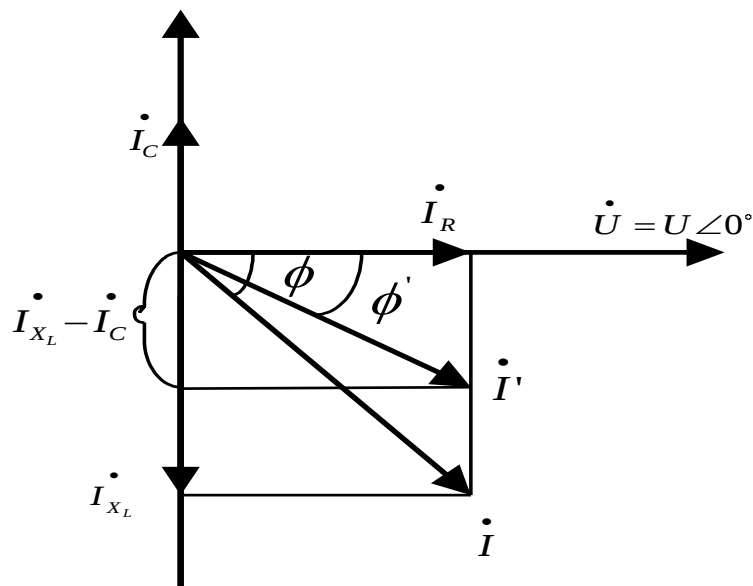


图 6.6.2 图6.6.1电路的电压电流向量图

$I_{XL} > I_C$ ，则 $I_{XL} - I_C$ 成为垂直

分量，水平分量 I_R 不变。

$\therefore -j(I_{XL} - I_C)$ 与 $\dot{I}_R$ 构成, $I' < I$

$\varphi' < \varphi \quad \therefore \cos \varphi' > \cos \varphi$ 功率因

数提高了，总电流减小了，日

光灯支路的有功功率，所需电

压均不变。

分析可知，提高功率因数一般是用电容支路电流与感性支路的无功电流互相补偿，（或电感电流与容性支路的无功

功率电流相互补偿) 如果把原电感支路的复功率分解为 P 和

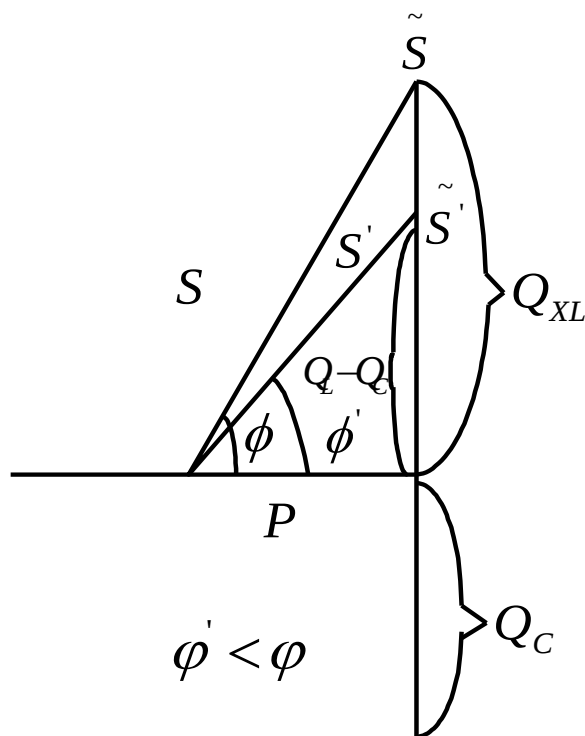


图 6.6.3 无功功率互相补偿减小了无功功率和相位差角提高了功率因数

Q , $\because$ 是感性支路 $\therefore Q_{XL} = XI^2 > 0$

(或) $Q_{BL} = -(-B_L)U^2 = B_L U^2 > 0$

并联 C 之路后, $Q_C = -B_C U^2 < 0$

P 不变, Q_{XL} 大, ϕ 角大,

$Q_{XL} - Q_C < Q_{XL} \therefore \phi'$ 角变小 $\phi' < \phi$

从本质上来讲提高功率因数采用的办法也可以看成是电路的无功

功率互相补偿, 减少了与电源返回交换。因而也就减少了线

路上的功损和电压损，见图6.6.3。需要并联的电容的参在其他条件都已知，且不变，的前提下，直接与 $\cos \varphi$ 有关。

$\cos \varphi$ 已知，则 φ 已知， $Q_{XL} = P \tan \varphi$

$\cos \varphi'$ 已知，则 φ' 已知， $Q_{XL} - Q_C = P \tan \varphi'$

可见， $Q_C = P(\tan \varphi - \tan \varphi')$

$$\omega C U^2 = Q_C \quad \therefore \quad C = \frac{Q_C}{\omega U^2} = \frac{P(\tan \varphi - \tan \varphi')}{\omega U^2}$$

用电流补偿计算也可以， $I_C = \omega C U$

$$I_{XL} = I \sin \varphi \quad I_{XL} - I_C = I' \sin \varphi'$$

$$\therefore I_c = I_{XL} - I' \sin \varphi' = I \sin \varphi - I' \sin \varphi'$$

$$C = \frac{I \sin \varphi - I' \sin \varphi'}{\omega U}$$

例7.有日光灯电路如图6.6.4，日光灯的有功功率 $P = 40$ 瓦，接在市电(有效值)上。日光灯的支路电流测出。请计算出该电路的功率因数及无功功率。

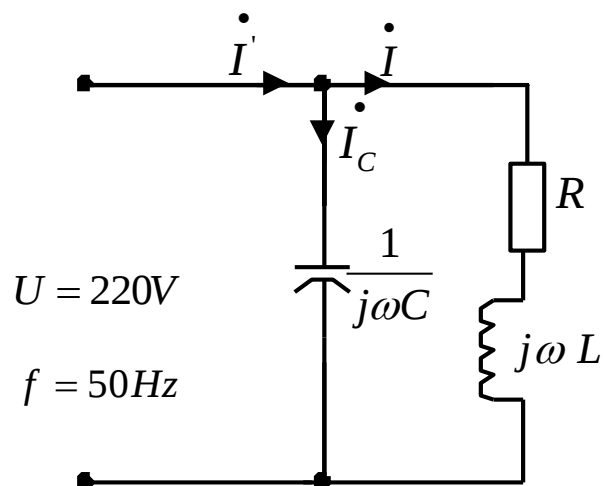


图 6.6.4 例7 $R + j\omega L$ 为日光灯的模型

解： $P = UI \cos \varphi$

$$\therefore \cos \varphi = \frac{P}{UI} = \frac{40}{220 \times 0.365} = 0.5$$

$$\varphi = 60^\circ$$

$$Q = P \tan \varphi = 40 \times \tan 60^\circ = 69.3 \text{ 乏}$$

可见无功功率很大，功率因数过低，现欲将功率因数提高到0.95，问应并多大电容？

$$\cos \varphi' = 0.95 \quad \varphi' = 18.2^\circ$$

$$Q' = P \tan \varphi' = 40 \times \tan 18.2^\circ = 13.1 \text{ 乏}$$

$$Q_C = Q - Q' = 69.3 - 13.1 = 56.2 \text{ 乏}$$

$$\omega C U^2 = Q_C$$

$$\therefore C = \frac{Q_C}{\omega U^2} = \frac{56.2}{314 \times 220^2} = 3.69 \times 10^{-6} \text{ F}$$

若将功率因数提高到1。 $\varphi'' = 0^\circ$, $Q' = 0$, 全部补偿。

$$Q_{C'} = Q = 69.3 \text{ 乏}$$

$$\therefore C' = \frac{Q_C}{\omega U^2} = \frac{Q}{\omega U^2} = \frac{69.3}{314 \times 220^2} = 4.55 \times 10^{-6} F$$

关于全补偿应用的说明。

并联 $3.69 \times 10^{-6} F$ 电容，功率因数提高到 0.95，线路上的总

电流 $I' = \frac{40}{220 \times 0.95} = 0.191 A$ 。并联 $4.55 \times 10^{-6} F$ 电容，功率

因数提高到 1，线路上的总电流 $I'' = \frac{40}{220} = 0.182 A$ 。

电流减少的百分比为 $\frac{0.191 - 0.182}{0.191} \times 100\% = 5\%$ 。

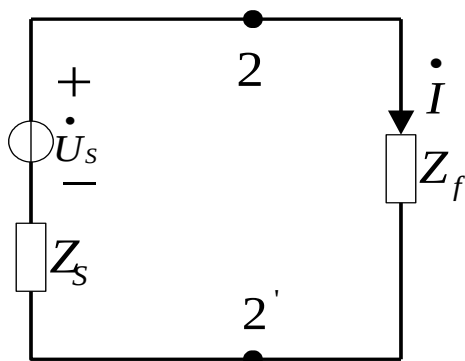
电容量增加的百分比为 $\frac{4.55 - 3.69}{3.69} \times 100\% = 23\%$

可见电容增加 23%，才使电流减少 5%，所以不经济，所以一般不要求全补偿，更不要过补偿。

6.7 负载获取最大功率（最大功率传输定理）

1. 共轭匹配

负载欲从有源二端网络获取最大功率，首先应将有源二端网络化成戴维南电路。现已有戴维南电路如图6.7.1。负载欲从该电路获得最大功率。



$$\dot{I} = \frac{\dot{U}_s}{Z_s + Z_f} = \frac{\dot{U}_s}{(R_s + R_f) + j(X_s + X_f)}$$

$$I = \frac{U_s}{\sqrt{(R_s + R_f)^2 + j(X_s + X_f)^2}}$$

图 6.7.1 某有源二端网络的等效戴维南电路 $\dot{U}_s$ 与 Z_s

$$P_{zf} = R_f \cdot I^2 = R_f \cdot \frac{U_s^2}{(R_s + R_f)^2 + j(X_s + X_f)^2}$$

当负载得电抗可调时，可调得使 $X_s + X_f = 0$ 。则 P_{zf} 可以

较大。此时： $P_{zf} = \frac{U_s^2 R_f}{(R_s + R_f)^2}$ ；如果 R_f 也可调，则可以

令 $\frac{dP_{zf}}{dR_f} = 0$ ，找到使 P_{zf} 取得最大值 R_f 的值。

$$\frac{dP_{zf}}{dR_f} = U_s^2 \frac{d}{dR_f} \left[\frac{R_f}{(R_s + R_f)^2} \right] = U_s^2 \frac{(R_s + R_f)^2 - R_f \cdot 2(R_s + R_f)}{(R_s + R_f)^4} = 0$$

$$R_s + R_f - 2R_f = 0, \quad \text{即} \quad R_s - R_f = 0$$

$\therefore Z_f$ 要从电源方获得最大功率则应使 $\begin{cases} X_s + X_f = 0 \\ R_s - R_f = 0 \end{cases}$

即 $\begin{cases} X_s = -X_f \\ R_s = R_f \end{cases}$

$\therefore Z_f = R_s - jX_s = Z_s^*$ 6 - 7 - 1式 称为共轭匹配。

Z_f 与 Z_s 共轭匹配时获得的功率就是最大功率 $P_{Z_f \max}$ 。

$$P_{Z_f \max} = \frac{U_s^2 R_f}{(R_s + R_f)^2} = \frac{U_s^2 R_s}{2^2 R_s^2} = \frac{U_s^2}{4R_s} \quad 6 - 6 - 2式$$

如果电源内阻抗是纯电阻，则要负载也是纯电阻 $R_f = R_s$ 才能获得最大功率。如果电源的内阻抗是感性的，则要求负载是容性的，且 $X_f = -X_s$ 才能获得最大功率。在共轭

匹配时，由于等效电源内电阻与负载电阻相等，所以等效电源内阻消耗的功率与负载取得的功率相等。

例8.有电路如图6.7.2a) 如 Z_L 的实虚两部均能调节，问 Z_L 等于多少能从电源内部获得最大功率？ 此最大功率等于多少？

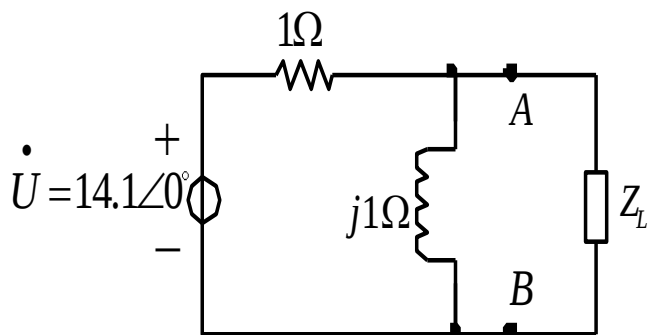


图 6.7.2a) 例8电路

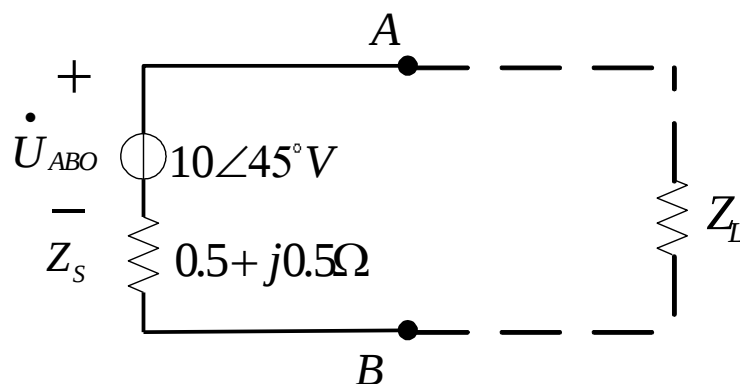


图 6.7.2b) 图6.7.2a) 的AB以右的戴维南等效电路

解：先求出AB端口以左的等效戴维南电路。

$$\dot{U}_{ABO} = \frac{\dot{U}}{1+j1} \cdot j1 = \frac{14.1\angle 0^\circ}{\sqrt{2}\angle 45^\circ} \times 1\angle 90^\circ = 10\angle 45^\circ \text{V}$$

$$Z_s = \frac{1 \times j1}{1+j1} = \frac{1\angle 90^\circ}{\sqrt{2}\angle 45^\circ} = 0.5 + j0.5\Omega \quad \text{等效电路如图6.7.1b。}$$

$$\therefore Z_L = Z_s^* = 0.5 - j0.5\Omega \quad \text{时能从电源获得最大功率。}$$

$$\text{最大 功率 } P_{\max} = \frac{U_{ABO}^2}{4R_s} = \frac{10^2}{4 \times 0.5} = 50\text{W}$$

***2. 如果负载的阻抗角不变，而阻抗的模可调，负载获取**

最大功率的条件是 $|Z_f| = |Z_s|$ 。

即 $|Z_f| = \sqrt{R_s^2 + X_s^2}$ **6 - 7 - 3式**

证明：负载 $Z_f = |Z_f| \angle \varphi_f = |Z_f| \cos \varphi_f + j |Z_f| \sin \varphi_f$

$$I = \frac{U_s}{\sqrt{(R_s + |Z_f| \cos \varphi_f)^2 + (X_s + |Z_f| \sin \varphi_f)^2}}$$

$$P_{Zf} = I^2 |Z_f| \cos \varphi_f = \frac{U_s^2 \cdot |Z_f| \cos \varphi_f}{(R_s + |Z_f| \cos \varphi_f)^2 + (X_s + |Z_f| \sin \varphi_f)^2}$$

$$\frac{dP_{Zf}}{d|Z_f|} = U_s^2 \frac{\cos \varphi_f [(R_s + |Z_f| \cos \varphi_f)^2 + (X_s + |Z_f| \sin \varphi_f)^2]}{[(R_s + |Z_f| \cos \varphi_f)^2 + (X_s + |Z_f| \sin \varphi_f)^2]^2} -$$

$$\frac{|Z_f| \cos \varphi_f [2(R_s + |Z_f| \sin \varphi_f) \cdot \cos \varphi_f + 2(X_s + |Z_f| \sin \varphi_f) \sin \varphi_f]}{[(R_s + |Z_f| \cos \varphi_f)^2 + (X_s + |Z_f| \sin \varphi_f)^2]^2}$$

令 $\frac{dP_{Z_f}}{d|Z_f|} = 0$ **经整理，上式得。**

$$\frac{dP_{Z_f}}{d|Z_f|} = \frac{U_s^2 \cos \varphi_f}{[(R_s + |Z_f| \cos \varphi_f)^2 + (X_s + |Z_f| \sin \varphi_f)^2]^2} \cdot (R_s^2 + X_s^2 - |Z_f|^2) = 0$$

$$\therefore |Z_f|^2 = R_s^2 + X_s^2$$

$$\therefore |Z_f| = \sqrt{R_s^2 + X_s^2} = |Z_s|, \quad \text{得证。}$$

特别是当负载为纯电阻。（模可调， $R_f = |Z_f| \cdot \cos \varphi_f$ ，角

不可调 $\varphi_f = 0$ $\therefore$ 调 $|Z_f|$ 也就是调 R_f ）

$$R_f = \sqrt{R_s^2 + X_s^2} \quad \text{6 - 7 - 4式，切切注意。}$$

例9.电路如图6.7.3所示试求负载的功率。1) 负载为 $5\ \Omega$ 电阻。2) 负载为纯电阻且与电源内阻抗匹配。3) 负载与电源内阻抗共轭匹配。

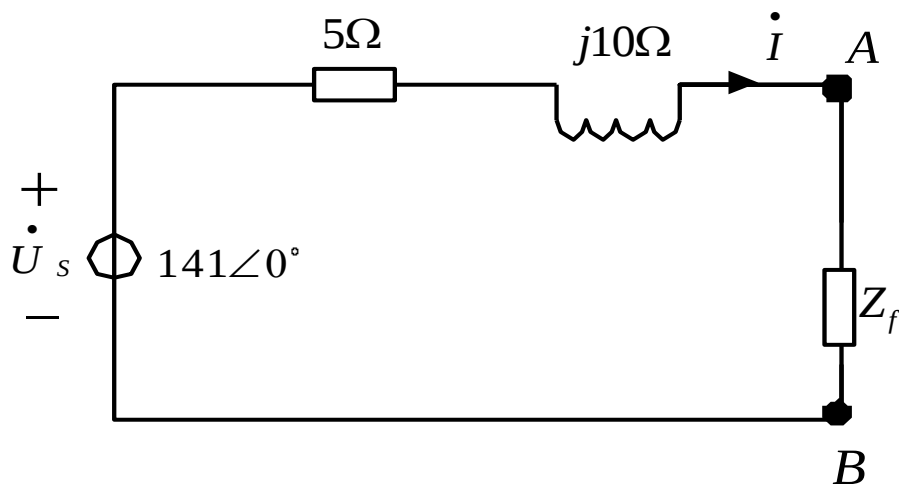


图 6.7.3 例9图

解： 1)
$$\dot{I} = \frac{\dot{U}_s}{5 + j10 + 5} = \frac{141\angle 0^\circ}{10\sqrt{2}\angle 45^\circ} = 10\angle -45^\circ \text{ A}$$

$$P_{Z_f} = I^2 R_f = 10^2 \times 5 = 500 \text{ W}$$

2) 当 $Z_f = R_f \Omega$ 与电源的内阻抗匹配。则,

$$R_f = \sqrt{5^2 + 10^2} = 11.2 \Omega$$

$$\dot{I} = \frac{141\angle 0^\circ}{(5 + 11.2) + j10} = \frac{141\angle 0^\circ}{19\angle 31.7^\circ} = 7.42\angle -31.7^\circ \text{ A}$$

$\therefore P_{Z_f} = I^2 R_f = 7.42^2 \times 11.2 = 617 \text{ W}$, **显然** $617 > 500$ 。

3) 共轭匹配

$$Z_f = 5 - j10\Omega, \text{ 此时最大功率 } P_{\max} = \frac{U_s^2}{4R_s} = \frac{141^2}{4 \times 5} = 994.05W$$

显然 $994.05 > 617 > 500$ 。可见共轭匹配负载获取的功率

最大，但是在共轭匹配下电源发出的功率只有一半被负

载吸收，所以从电源发电的效率来看 $\eta = 50\%$ ，另外如

果线路上阻抗小，在共轭匹配可能因为总阻抗小，将会

产生很大的电流。因而在电力部门力避共轭匹配，但在

电信，自控等比较适用。

6.8谐振

一个电路中接有电阻元件，电感元件，电容元件。在没有短路，断路的情况下，对外呈现电阻性，线路上的电压电流同相位，这种情况就叫做谐振。

6.8.1 串联谐振

- 一般电感线圈与电容串联的等效电路如图6.8.1a)。

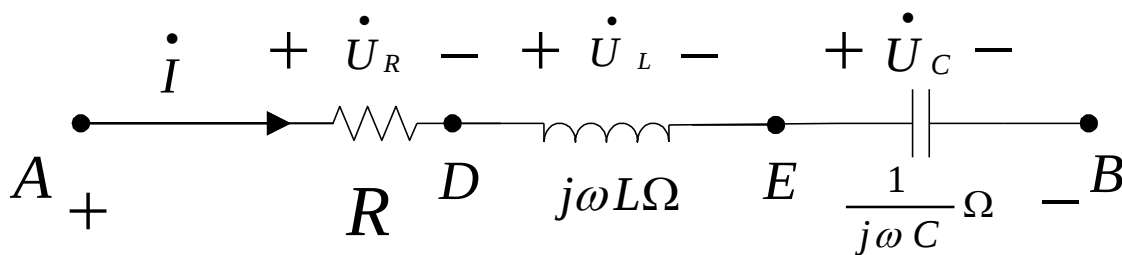


图 6.8.1a)RLC串联电路

1、串联谐振的条件及特点

当 $\omega L = \frac{1}{\omega C}$ 6-8-1式时, $Z = R$ 6-8-2式; $\dot{U} = R \dot{I}$ 6-8-3式;支路

电压电流同相位

$\because \sqrt{R^2 + (\omega L - \frac{1}{\omega C})^2}$ 在 $\omega L = \frac{1}{\omega C}$ 变得最小, $\therefore I = \frac{U}{R}$ 最大 6-8-4

式, 将 $\omega L = \frac{1}{\omega C}$ 中的 ω 令为 $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ 6-8-5式称为谐振角频率。=

$Z = R + j(\omega L - \frac{1}{\omega C}) = R$ 对外呈现电阻性, 支路电压电流同相位故电路发生了谐

振, 因为是在串联电路中发生的故称为串连谐振, 发生串联谐振的最直接, 最直观结果之一是电流达到最大值。

$$\begin{aligned} &\text{在串联谐振时 } \omega_0 L = \frac{1}{\omega_0 C} \quad \therefore \quad \omega_0 L I = \frac{1}{\omega_0 C} I \quad \text{即 } U_{L0} = U_{C0}, \\ &\text{但是 } \dot{U}_{L0} = j\omega_0 L \dot{I} \quad \text{而 } \dot{U}_{C0} = -j\frac{1}{\omega_0 C} \dot{I} \quad \therefore \quad U_{L0} + U_{C0} = 0 \end{aligned}$$

这是串联谐振的结果之二。

所以此时在L两端测量 $U_L \neq 0$ ，在C两端测量 $U_C \neq 0$ ，但是在L和C串联结构两端测量 $|U_{L0} + U_{C0}| = 0$ ，即 $U_{DB} = 0$ 。 $\therefore$ 串联谐振又叫做电压谐振。

由于可能 $\omega_0 L = \frac{1}{\omega_0 C} \gg R$ $\therefore$ 有可能 $U_{L0} = U_{C0} \gg U_R$ ，而 $U_R = U$ 。

∴ 串联谐振时 有可能 $U_{L0} \gg U$; $U_{C0} \gg U$ 。这也是在电压谐振的第二种现象和将串联谐振称为电压谐振的第二个原因。在实际中得到广泛的应用, 如果 $\frac{\omega_0 L}{R} = 100$ 。

外加电压 $U = 1V$,则在L元件两端或C元件两端均会取得 **100V** 的电压输出。同样串联谐振在通信领域中得到应用而在电力系统中是力求避免的, 因为L或C上产生过电压

可能会击穿电容器和线圈的绝缘或产生过电流。在谐振时 U_L 或 U_C 虽然比外加电压可以大许多倍但是并不是取得最大值。

$U_{L\max}$ 和 $U_{C\max}$ 的取得不在谐振频率上, 而在谐振频率 $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ 的两边。串联谐振的电抗 $X = X_L - X_C = \omega L - \frac{1}{\omega C}$ 的频率特性如图6.8.1b)。

由曲线可知在谐振频率 ω_0 以下容抗占上风，电路呈容性。在谐振频率以上感抗占上风，电路呈感性。

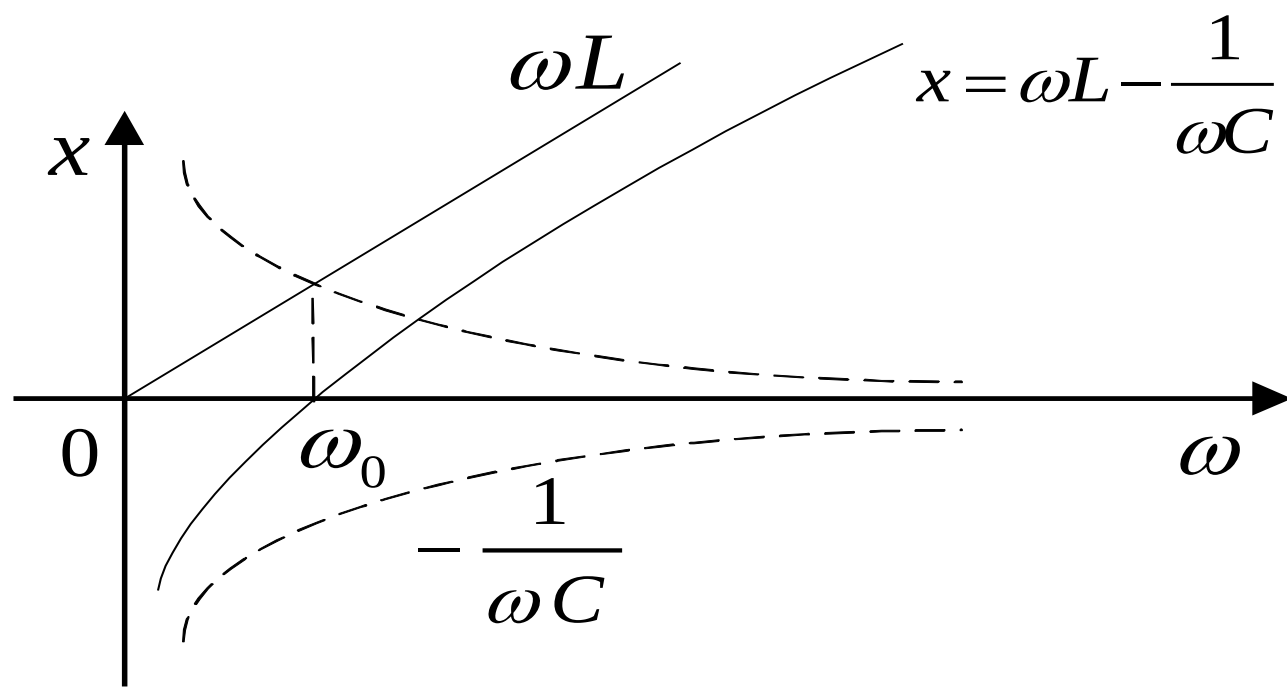


图 6.8.1b) 串联谐振电路的 X 与的 ω 关系

2. 串联谐振电路的品质因数

在发生串联谐振时 $\omega_0 L \gg R$, $\frac{\omega_0 L I_0}{R I_0} = \frac{U_{L0}}{U_R} = \frac{U_{L0}}{U} \gg 1$ 。

将 $\frac{\omega_0 L}{R}$ 用 Q 表示, Q 称为品质因数。串联谐振的品质因数 $Q = \frac{\omega_0 L}{R}$ 6-8-6式。

又 $\because \omega_0 L = \frac{1}{\omega_0 C} \therefore Q = \frac{1}{\frac{R}{\omega_0 C}} = \frac{\omega_0 C}{R} = \frac{1}{\omega_0 L R}$ 6-8-7式 或 $Q = \frac{U_{L0}}{U} = \frac{U_{C0}}{U}$ 6-8-8式

从上式可以看见品质因数 Q 越高, 在相同的激励电压 U 作用下在电感两端或电容两端取得的电压就越大, 谐振越强。

$$Q = \frac{\omega_0 L I_0^2}{R I_0^2} = \frac{X_{L0} I_0^2}{R I_0^2} = \frac{\text{谐振时电感中的无功功率}}{\text{谐振时电阻消耗的有功功率}} = \frac{2\pi f_0 L I_0^2}{R I_0^2}$$

$$= \frac{2\pi \cdot L \cdot \left(\frac{I_{Lm}}{\sqrt{2}} \right)^2}{T_0 \cdot R \cdot I_0^2} = 2\pi \frac{\text{谐振电路中电磁场总能量}}{\text{一周时间内电阻消耗的能量}}$$

由上式可见 Q 反映了谐振电路中电磁场能量与一周时间内电路消耗的能量相对关系。也就是说在一定时间内在维持一定的电磁振荡的前提下，需要补充的能量越少越好，这要求电路的品质因数 Q 要高。

3. 串联谐振电路的频率特性

当我们用谐振电路时首先利用的是它的谐振特性。品质因数 Q 高，谐振强，弱信号被放大，因而很容易的被选择出来。而 Q 高的电路失真度也大。因而选用，设计电路时要兼顾选择性和不失真性。不是品质因数越高越好，在具体应用时设计手册中有各种不同值下的相应电流与频率的相互关系的曲线称为相应的频率特性曲线。

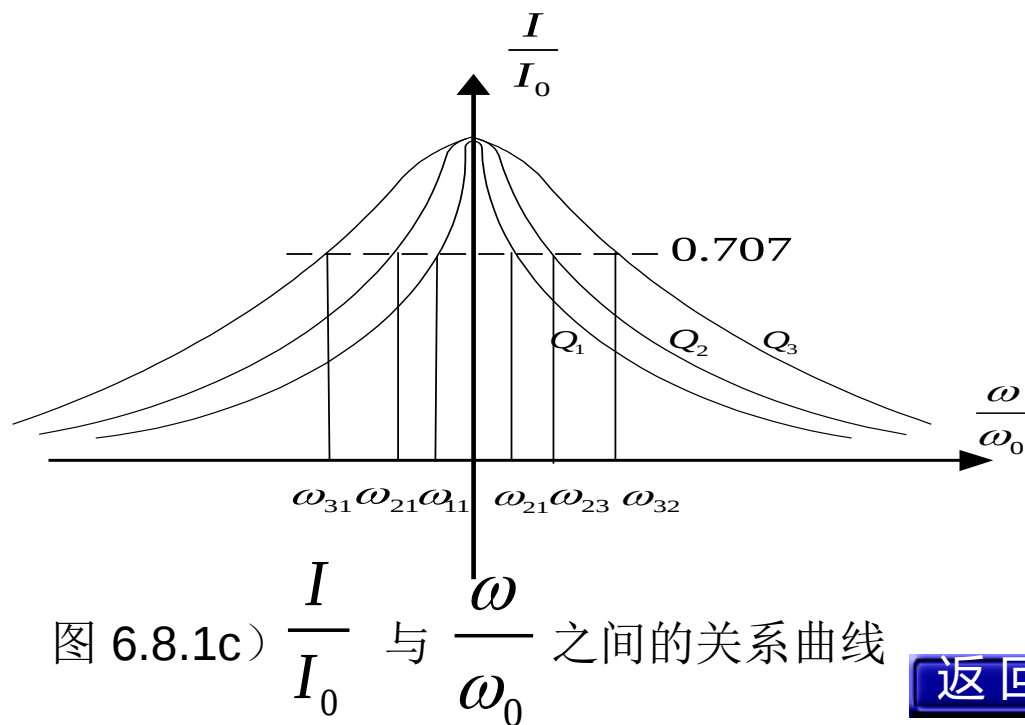
从上面的分析可知：

$$\begin{aligned}\dot{I} &= \frac{\dot{U}}{R + j(\omega L - \frac{1}{\omega C})} = \frac{\dot{U}}{R + j(\frac{\omega}{\omega_0} \omega_0 L - \frac{\omega_0}{\omega} \cdot \frac{1}{\omega_0 C})} = \frac{\dot{U}}{R + j\omega_0 L(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega})} \\ &= \frac{\dot{U}}{R} \cdot \frac{1}{1 + j\omega_0 \frac{L}{R}(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega})}\end{aligned}$$

$$= \dot{I}_0 \cdot \frac{1}{1 + jQ\left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right)}$$

$$\frac{I}{I_0} = \frac{1}{\sqrt{1 + Q^2\left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right)^2}}$$

上式中 I 为非谐振时的电流，称为失谐时的电流， I_0 为谐振时的电流， Q 为品质因数， ω 为非谐振时的频率， ω_0 为谐振频率。将上式绘成曲线如图6.8.1c。



图中 $Q_1 > Q_2 > Q_3$ ， Q_1 的品质因数最高。

当 $\frac{I}{I_0} = 0.707$ 的范围时基本不失真，从 Q_1 的曲线上 $\frac{I}{I_0} = 0.707$ 的频率范围为 $\omega_{11} \sim \omega_{12}$ 之间 $BW_1 = \omega_{12} - \omega_{11}$ 称为曲线1的频带宽度或通频带。而 Q_3 的频带宽度为 $BW_3 = \omega_{32} - \omega_{31}$ ， $BW_3 > BW_1$

可见品质因数越高的曲线越陡，选择性越好，但是频带宽度窄，失真度大。品质因数越低曲线越平缓选择性差，但频带宽度宽，失真度小。

*1) ω_2 , ω_1 (或 f_2 , f_1) 分别称为上3分贝频率和下3分贝频率。因为有 $20\log \frac{I}{I_0} = 3dB$

即 $20\log 0.707 = 20 \times (1 + 0.8494) = 20 \times (-0.15) = 3dB$

*2) 串联电路 $U_{L\max}$, $U_{C\max}$ 分别在 $\omega = \omega_0 \sqrt{\frac{2Q^2}{2Q^2 - 1}} > \omega_0$ 处和 $\omega = \omega_0 \sqrt{\frac{2Q^2 - 1}{2Q^2}} < \omega_0$ 处取得。 $U_{L\max} = U_{C\max} = \frac{QU}{\sqrt{1 - \frac{1}{4Q^2}}} > QU$; Q 为品质因数。

*3) 谐振电路的品质因数 Q 又可以定义为 $Q = \frac{\omega_0}{\omega_2 - \omega_1} = \frac{f_0}{f_2 - f_1}$ 即中心频率 (谐振频率) 比频带宽度。

证明：谐振时的电流有效值 $I_0 = \frac{U}{R}$ ，失谐是电流 $I = \frac{U}{\sqrt{R^2 + (\omega L - \frac{1}{\omega C})^2}}$ 。

在上3分贝频率和下3分贝频率时 $\frac{I}{I_0} = \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{1}{\sqrt{2}}$

也就是 $\frac{\frac{U}{\sqrt{R^2 + (\omega L - \frac{1}{\omega C})^2}}}{\frac{U}{R}} = \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{1}{\sqrt{2}}$

$$\frac{R}{\sqrt{R^2 + (\omega L - \frac{1}{\omega C})^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\omega L - \frac{1}{\omega C} = \pm R \quad \text{整理得} \quad \omega^2 \mp \frac{R}{L} \omega - \frac{1}{LC} = 0$$

$$\therefore \omega = \frac{\pm \frac{R}{L} \pm \sqrt{\left(\frac{R}{L}\right)^2 + 4 \times \frac{1}{LC}}}{2} = \pm \frac{R}{2L} \pm \sqrt{\left(\frac{R}{2L}\right)^2 + \frac{1}{LC}}$$

$$\omega \neq -|\omega| \quad \therefore \omega_2 = \frac{R}{2L} + \sqrt{\left(\frac{R}{2L}\right)^2 + \frac{1}{LC}} \quad \text{及} \quad \omega_1 = -\frac{R}{2L} + \sqrt{\left(\frac{R}{2L}\right)^2 + \frac{1}{LC}}$$

通频带

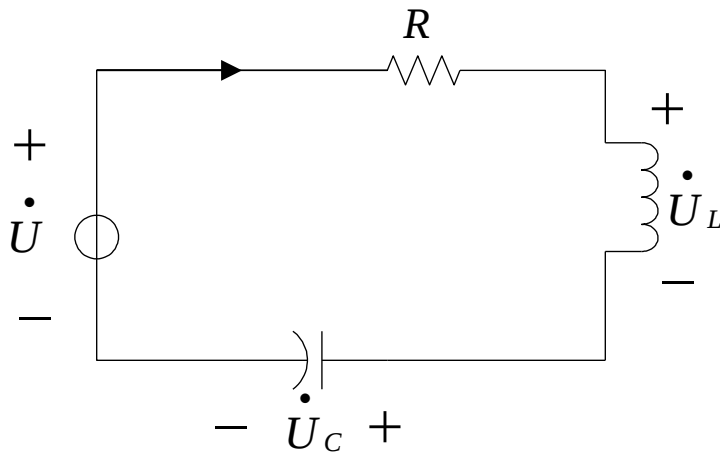
$$BW = \omega_2 - \omega_1 = \frac{R}{2L} - \left(-\frac{R}{2L}\right) = \frac{R}{L}$$

$$Q = \frac{\omega_0 L}{R} = \frac{\omega_0}{\frac{R}{L}} = \frac{\omega_0}{\omega_2 - \omega_1} = \frac{f_0}{f_2 - f_1}$$

得证。

例10.有RLC串联电路与电压源相联, $R = 10\Omega$, $L = 100\mu H$, $C = 100pF$ 。电压源电压有效值 $U = 1V$; 求谐振角频率 ω_0 , 品质因数 Q , 谐振时的电流 I_0 及谐振时电感电压电容电压 U_{L0} , U_{C0} 。

解: 画出RLC与 $\dot{U}_s$ 串联电路如下,



例10图

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} = \frac{1}{\sqrt{100 \times 10^{-6} \times 100 \times 10^{-12}}} = 10^7 \text{ rad/s}$$

$$Q = \frac{\omega_0 L}{R} = \frac{10^7 \times 100 \times 10^{-6}}{10} = 100$$

$$I_0 = \frac{U}{R} = \frac{1}{10} = 0.1 \text{ A}$$

$$U_{L0} = RI_0 Q = 10 \times 0.1 \times 100 = 100 \text{ V}$$

$$\text{或 } U_{L0} = QU = 100 \times 1 = 100 \text{ V}$$

$$U_{L0} = \omega_0 L I_0 = 10^7 \times 100 \times 10^{-6} \times 0.1 = 100 \text{ V}$$

$$\text{或 } U_{L0} = U_{C0} = 100 \text{ V}$$

解毕

例11.为了测定某一线圈的参数 R ， L 及其品质因数，将线圈与一个 $C=199pF$ 的电容器相串联进行试验，由实验所得的谐振曲线如图6.8.1d)。其谐振频率为 $f_0=800KHz$ 。通频带的边界频率 $f_1=796KHz$ ， $f_2=804KHz$ 。求回路的品质因数及线圈的等效参数 R 和 L 。

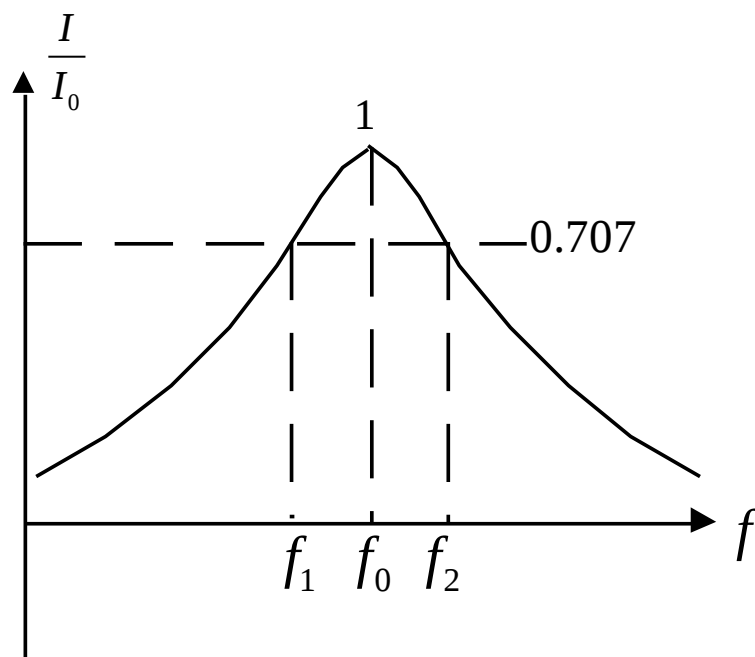


图 6.8.1d) 例11的 $\frac{I}{I_0}$ 频率特性

解：

$$Q = \frac{f_0}{f_2 - f_1} = \frac{800 \times 10^3}{(804 - 796) \times 10^3} = \frac{800}{8} = 100$$

$$Q = \frac{\omega_0 L}{R} = \frac{1}{\frac{\omega_0 C}{R}}$$

$$\frac{1}{\omega_0 C R} = Q \quad \therefore \quad R = \frac{1}{\omega_0 C Q} = \frac{1}{2\pi \times 800 \times 10^3 \times 199 \times 10^{-12} \times 100} = 10\Omega$$

$$L = \frac{QR}{\omega_0} = \frac{100 \times 10}{2\pi \times 800 \times 10^3} = 200 \times 10^{-6} H$$

6.8.2 并联谐振

1. 以G, C, L并联电路为例, 有电路图6.8.2a)

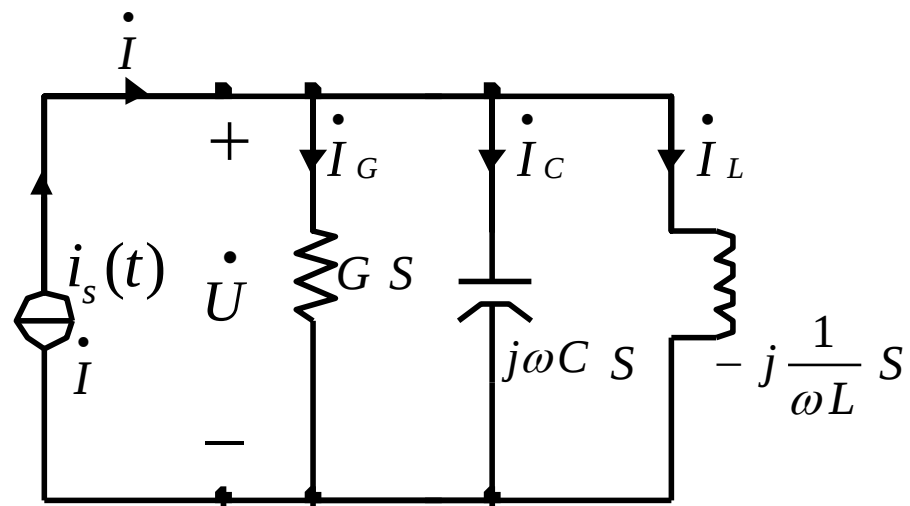


图 6.8.2a) GCL 并联谐振电路图中 S 表示西门子

$$\begin{aligned}
 \dot{I} &= \dot{I}_G + \dot{I}_C + \dot{I}_L \\
 &= (G + j\omega C - j\frac{1}{\omega L})\dot{U} \\
 \frac{\dot{I}}{\dot{U}} &= Y = G + j\omega C - j\frac{1}{\omega L}
 \end{aligned}$$

当 $\omega C = \frac{1}{\omega L}$ 时 ($\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ 称为谐振角频率)

$Y = G$ ，复导纳等于电导，支路成为纯电导性电路。

$$\dot{U} = \frac{\dot{I}}{Y} = \frac{\dot{I}}{G} = R \dot{I} \quad \text{支路电压 } \dot{U} \text{ 与支路电流同相位。}$$

$$\because Y = G \quad \therefore |Y| < \sqrt{G^2 + (\omega C - \frac{1}{\omega L})^2} \quad \text{达到最小值}$$

$$\therefore U_0 = \frac{I_0}{G} \quad \text{达到最大值}$$

$$\dot{I}_0 = \dot{U} G = \dot{I}_G, \quad \dot{I}_{C0} + \dot{I}_{L0} = 0, \quad \text{外加电流好像只通过G支路但是}$$

$$\dot{I}_{C0} \neq 0, \quad \dot{I}_{L0} \neq 0, \quad I_{C0} = I_{L0} = \omega_0 C U_0 = \frac{1}{\omega_0 L} U_0, \quad \dot{I}_{C0} \text{ 与 } \dot{I}_{L0} \text{ 大小相等方向相反。当}$$

$$\omega_0 C \gg G, \quad \frac{1}{\omega_0 L} \gg G \quad \text{时} \quad I_{C0} \gg I_G, \quad I_{L0} \gg I_G。$$

$\therefore$ 并联谐振又叫电流谐振。

GCL并联电路的电纳 B 随 ω 变化的曲线如图6.8.2b),可见在谐振频率以下电路呈感性,谐振频率以上呈容性。GOL并联电路的频率特性即 $\frac{U}{U_0}$ 与 $\frac{\omega}{\omega_0}$ 的关系曲线如图6.8.2c)。其中 Q 为品质因数。

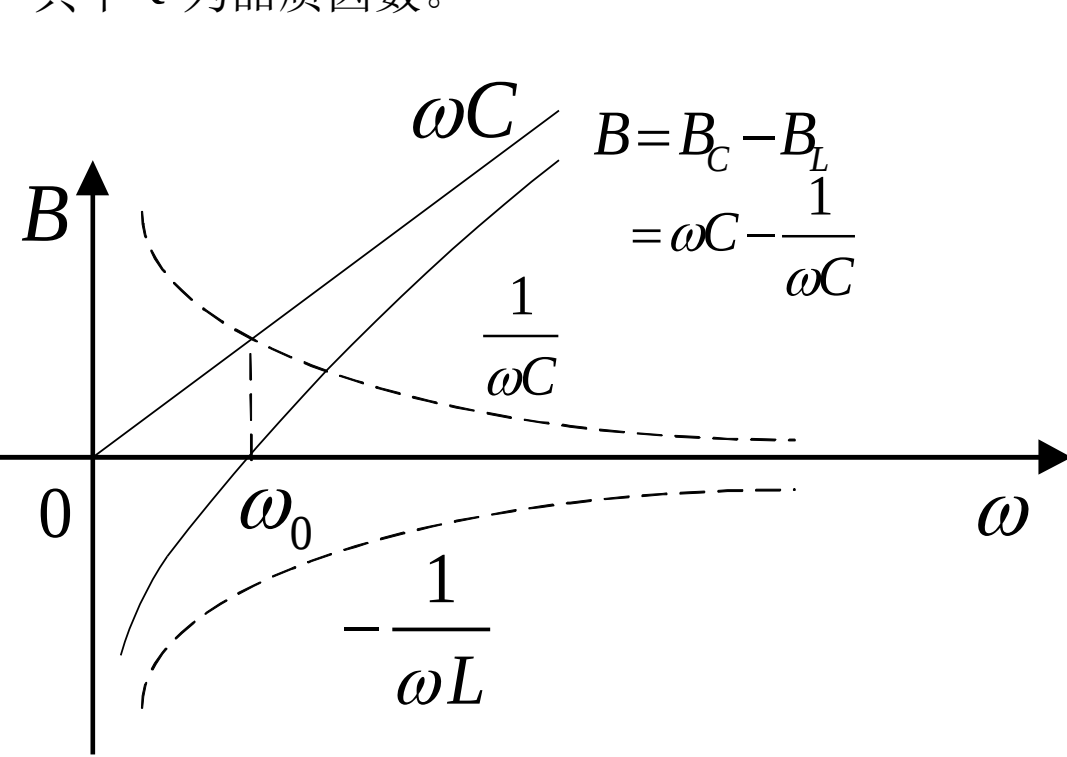


图 6.8.2b) GCL并联电路电纳的频率特性

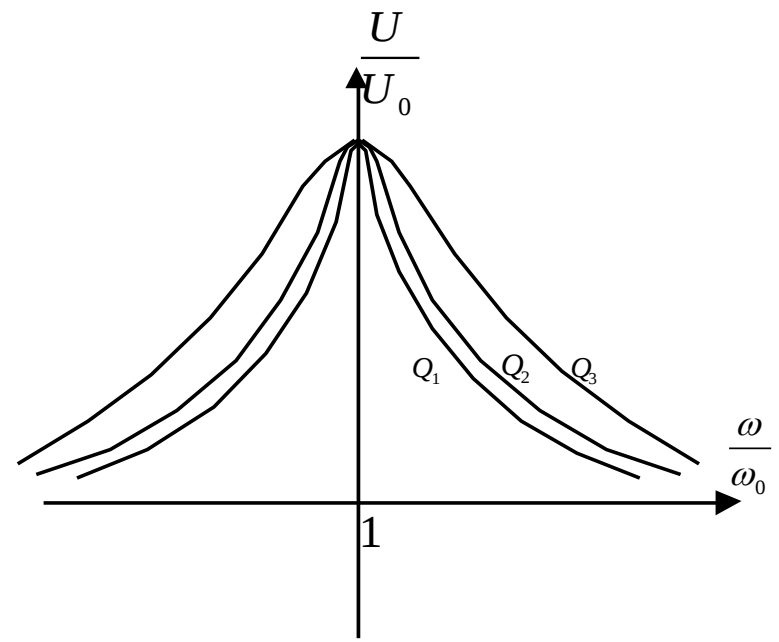


图 6.8.2c) GCL并联电路 $\frac{U}{U_0}$ 与 $\frac{\omega}{\omega_0}$ 的关系

由于并联电路与串联电路是对偶电路， G 与 R ， C 与 L ， L 与 C 为对偶元件， i , u 为对偶变量。 $\therefore$ 并联谐振的条件及特点可以与串联电路对偶分析，例如品质因数 Q 在串联电路

中 $Q = \frac{U_{L0}}{U} = \frac{U_{C0}}{U}$ 。 $U \rightarrow I, L \rightarrow C, C \rightarrow L$ 。可得并联谐振品质因数 $Q = \frac{I_{L0}}{I} = \frac{I_{C0}}{I} = \frac{\omega_0 CU}{GU} = \frac{\omega_0 C}{G} = \frac{1}{\frac{\omega_0 L}{G}}$ 。

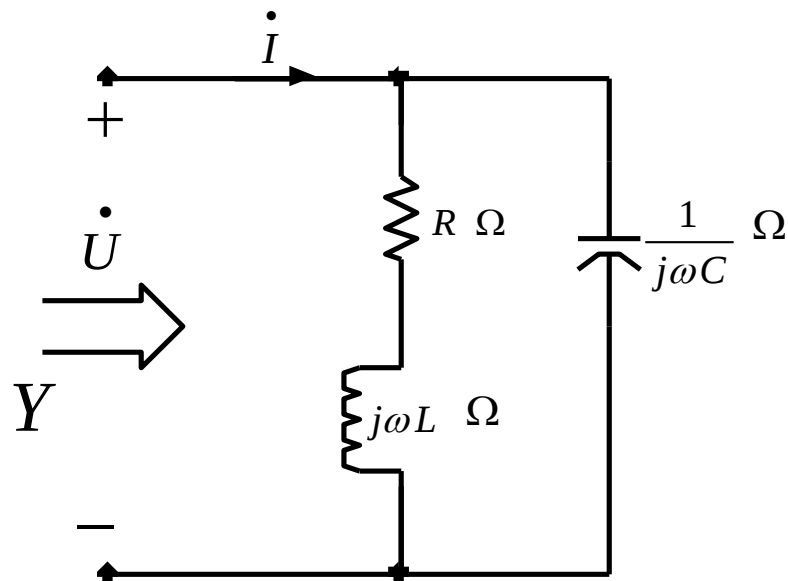
*2.如果线圈（ $R + j\omega L$ ）与电容并联，要求其并联谐振角频率和品质因数

$$y = \frac{1}{R + j\omega L} + j\omega C$$

$$= \frac{R}{R^2 + (\omega L)^2} + j \frac{-\omega L}{R^2 + (\omega L)^2} + j\omega C$$

$$Y = \frac{R}{R^2 + (\omega L)^2} \quad \text{则需}$$

$$\omega C = \frac{\omega L}{R^2 + (\omega L)^2}$$



反过来说当 $\omega C = \frac{\omega L}{R^2 + (\omega L)^2}$ 条件满足时 $Y = \frac{R}{R^2 + (\omega L)^2}$ 为电导，电路对外呈现

电阻性。电流 $\dot{I}$ 与 $\dot{U}$ 同相位，电路达到谐振。

在高频时 $\omega L \gg R$ ，若将 $\frac{\omega L}{R}$ 定义为电路的品质因数 Q ，就是品质因数足够高的线圈

圈 $(\omega L)^2 \gg R^2 \quad \therefore R^2$ 可略去。

$$\omega C = \frac{\omega L}{(\omega L)^2} = \frac{1}{\omega L} \quad \therefore \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \quad Q = \frac{\omega_0 L}{R}$$

结论：对于品质因数足够高的线圈来说，线圈与电容器并联电路的品质因数就是线圈的品质因数。并联谐振角频率与GCL并联电路的并联谐振电路相同。

*3.对于一般电路而言，要求其串联谐振条件及分析串联谐振时电路中的各种变量及相互关系，只要先求出等效复阻抗 Z ，令 Z 的虚部为0即可。同理要求并联谐振条件只 要先求出等效复导纳 Y 。令 Y 的虚部等于0即可。

特殊情况，令 $Z = jX$ ，令 $X = 0$ 则 $Z = 0$ ，即发生串联谐振时该段支路纯电路支路相当于短路。

$Y = jB$ ，令 $B = 0$ ，则 $Y = 0$ 。发生并联谐振时该段支路纯导纳并联等效电路相当于开路。

6.9 互感耦合电路

6.9.1 互感耦合的基本概念

1、 当电路中有不止一个线圈，线圈没有垂直放置又没有加磁屏蔽，那么一个线圈中的磁通必然要通过另一线圈。该磁通的变化必然要引起本身线圈中磁链的变化，在线圈两端形成电压降，也必然要引起另一线圈中由该磁通形成的磁链的变化在另一线圈的两端引起电压降，反之亦然。这种由于电磁场的交链而引起的一系列现象叫互感耦合现象。

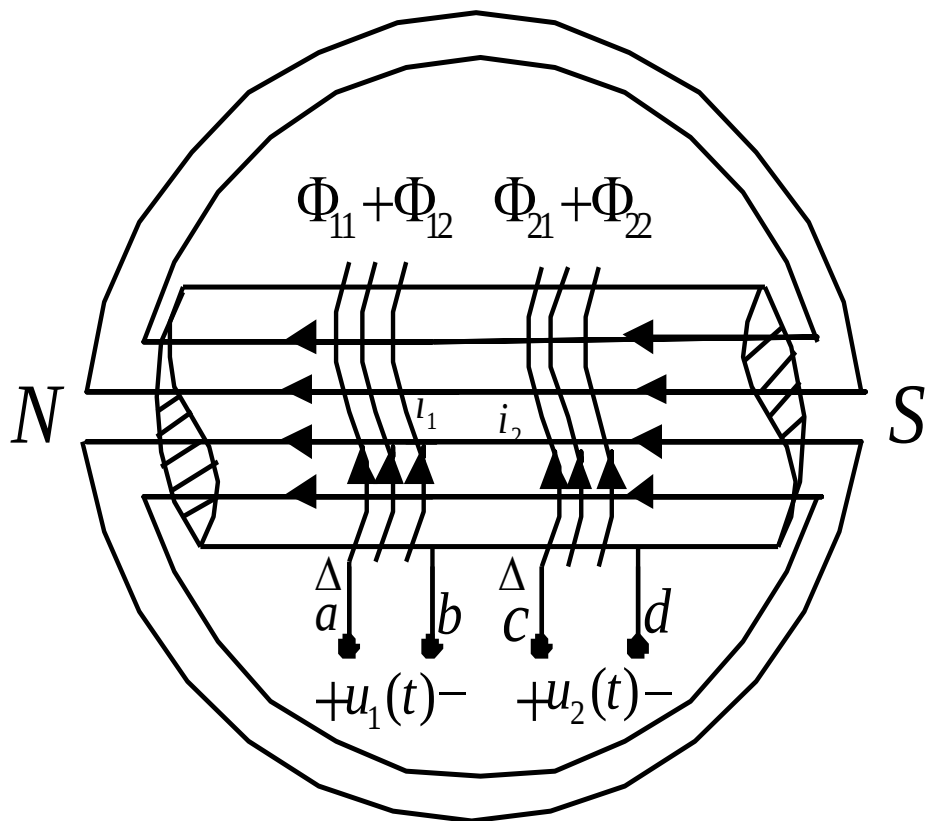


图 6.9.1a 线圈1, 线圈2绕向相同, 电流流向也相同

现在有两个线圈在同一空心圆筒上绕向相同, 电流 i_1 从 a 端流进, b 端流出, ab 线圈为线圈1。电流 i_2 从 c 端流进, d 端流出, cd 为线圈2。如图6.9.1a)。

据右手螺旋定则可以知道其磁通的方向。如图中所示, 由于两线圈的绕向相同, 在图示电流的流向下使得 i_2 在线圈1中形成的磁通 Φ_{12} 与 i_1 在自己线圈1中形成的磁通 Φ_{11} 方向相同, 互相加强。

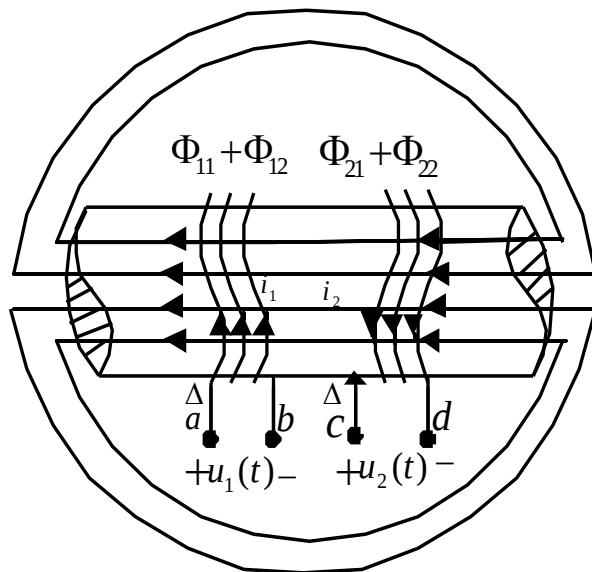


图6.9.1b

于是，线圈1中的磁链是 $\psi_{11} + \psi_{12} = N_1 \Phi_{11} + N_1 \Phi_{12}$

同理线圈2中的磁链为 $\psi_{22} + \psi_{21} = N_2 \Phi_{22} + N_2 \Phi_{21}$

线圈1的电压 $u_1(t) = \frac{d\psi_1}{dt} = \frac{d(\psi_{11} + \psi_{12})}{dt}$ $\psi_{11} = L_1 i_1(t)$

$\psi_{12} = M_{12} i_2(t)$ 在线性定常电路中 M_{12} 为常数。

$$\therefore \begin{cases} u_1(t) = \frac{d(\psi_{11} + \psi_{12})}{dt} = \frac{d[L_1 i_1(t) + M_{12} i_2(t)]}{dt} = L_1 \frac{di_1(t)}{dt} + M_{12} \frac{di_2(t)}{dt} \\ u_2(t) = \frac{d(\psi_{22} + \psi_{21})}{dt} = \frac{d[L_2 i_2(t) + M_{21} i_1(t)]}{dt} = L_2 \frac{di_2(t)}{dt} + M_{21} \frac{di_1(t)}{dt} \end{cases}$$

实验证明 $M_{12} = M_{21} = M$ ，具有L的量纲，基本单位为H（亨利）。**称为两线圈的互感。**

如果线圈1的绕向不变，线圈2的绕向与a图中相反，电流还是从a, c流进。b, d流出。由右手螺旋定则可知 Φ_{12} 与 Φ_{11} 方向相反， Φ_{21} 与 Φ_{22} 方向相反，磁场互相削弱。线圈1中的磁链为 $\psi_{11} - \psi_{12}$ ，线圈2中的磁链为 $\psi_{22} - \psi_{21}$ 。

$$\therefore \begin{cases} u_1(t) = \frac{d(\psi_{11} - \psi_{12})}{dt} = \frac{d[L_1 i_1(t) - M_{12} i_2(t)]}{dt} = L_1 \frac{di_1(t)}{dt} - M_{12} \frac{di_2(t)}{dt} \\ u_2(t) = \frac{d(\psi_{22} - \psi_{21})}{dt} = \frac{d[L_2 i_2(t) - M_{21} i_1(t)]}{dt} = L_2 \frac{di_2(t)}{dt} - M_{21} \frac{di_1(t)}{dt} \end{cases}$$

$M_{12} = M_{21} = M$ 还是成立。

由此可见两线圈中的磁场是相互加强还是相互减弱取决于电流的流向（例如a图中将线圈2的电流取反向则两线圈是互相减弱的。）以及线圈的绕向。

2、为了实际应用及电路图的简明清晰和分析的方便，提出了同名端的概念。

同名端:电流从同名端流进（或流出）时线圈的磁场相互加强，同名端往往用 $*$, Δ , $\bullet$ 等记号表示。如图6.9.1a)中a, c为同名端用 $*$ 表示；图6.9.1b)中的同名端用 Δ 表示，标志在a, d端纽。

同名端同极性。将6.9.1a)中的线圈1,2用电路等效符号表示则为图6.9.1c)

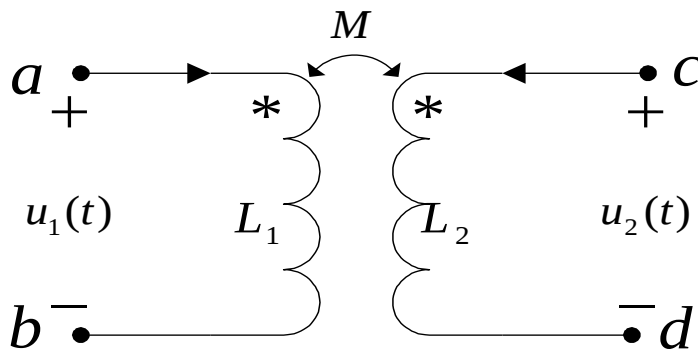


图6.9.1c

$$u_1(t) = L_1 \frac{di_1(t)}{dt} + M \frac{di_2(t)}{dt} \quad u_2(t) = L_2 \frac{di_2(t)}{dt} + M \frac{di_1(t)}{dt}$$

现设 $i_2(t) = 0$ **且** $\frac{di_2(t)}{dt} = 0$ $\frac{di_1(t)}{dt} > 0$

$$\therefore u_1(t) = L_1 \frac{di_1(t)}{dt} > 0 \quad u_1(t) = u_a(t) - u_b(t) > 0$$

$$\therefore u_a(t) > u_b(t)$$

$$u_2(t) = M \frac{di_1(t)}{dt} > 0 \quad u_2(t) = u_c(t) - u_d(t) > 0$$

$$\therefore u_c(t) > u_d(t)$$

$$\therefore u_c(t) > u_d(t)$$

$\therefore$ a, c同为高电位, 正极。

b, d同为低电位, 负极。

a, c是同名端; b, d也是同名端。

$\therefore$ 同名端同极性, 得证。

3、**耦合系数** $K = \frac{M}{\sqrt{L_1 L_2}} \leq 1$, 表明线圈之间底耦合程度, K越接近1, 则耦合越紧。

$$\text{证明: } \psi_{11}(t) = N_1 \Phi_{11}(t) = L_1 i_1(t) \quad \therefore L_1 = \frac{N_1 \Phi_{11}(t)}{i_1(t)}$$

$$\psi_{12}(t) = N_1 \Phi_{12}(t) = M i_2(t) \quad \therefore M = \frac{N_1 \Phi_{12}(t)}{i_2(t)}$$

$$\psi_{22}(t) = N_2 \Phi_{22}(t) = L_2 i_2(t) \quad \therefore L_2 = \frac{N_2 \Phi_{22}(t)}{i_2(t)}$$

$$\psi_{21}(t) = N_2 \Phi_{21}(t) = M i_1(t) \quad \therefore M = \frac{N_2 \Phi_{21}(t)}{i_1(t)}$$

$$\frac{M^2}{L_1 L_2} = \frac{N_1 \frac{\Phi_{12}(t)}{i_2(t)} \cdot N_2 \frac{\Phi_{21}(t)}{i_1(t)}}{N_1 \frac{\Phi_{11}(t)}{i_1(t)} \cdot N_2 \frac{\Phi_{22}(t)}{i_2(t)}} = \frac{\Phi_{12} \Phi_{21}}{\Phi_{11} \Phi_{22}} \leq 1$$

$$\therefore K = \sqrt{\frac{M^2}{L_1 L_2}} \leq 1 \quad K = \frac{M}{\sqrt{L_1 L_2}} \leq 1 \quad \text{得证}$$

6.9.2 有互感耦合的线圈的联接

1、 串联：分顺串和反串两种情况。

顺串：6.9.2a)中b与c相联 $i_1(t)$ 从a, c同名端流进。

$$i_1(t) = i_2(t) = i(t)$$

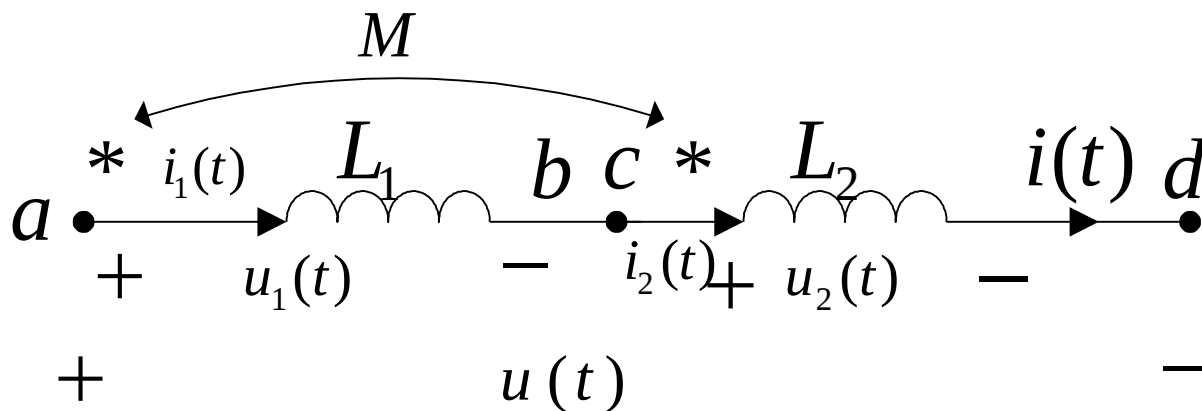


图 6.9.2a) 有互感 M 的 L_1, L_2 两线圈顺串

$$u(t) = u_{ad}(t) = u_1(t) + u_2(t)$$

$$\begin{cases} u_1(t) = L_1 \frac{di_1(t)}{dt} + M \frac{di_2(t)}{dt} = (L_1 + M) \frac{di(t)}{dt} \\ u_2(t) = L_2 \frac{di_2(t)}{dt} + M \frac{di_1(t)}{dt} = (L_2 + M) \frac{di(t)}{dt} \end{cases}$$

$$\therefore u(t) = [(L_1 + M) + (L_2 + M)] \frac{di(t)}{dt} = (L_1 + L_2 + 2M) \frac{di(t)}{dt}$$

$$\therefore u(t) = L \frac{di(t)}{dt} = (L_1 + L_2 + 2M) \frac{di(t)}{dt}$$

$$\therefore L = L_1 + L_2 + 2M$$

6 - 9 - 2 (1) 式

反串：当图6.9.2b) 中两个线圈的b, c相联, $i_1(t) = i_2(t) = i(t)$ 是从a, c异名端流进的。如图6.9.2b)所示。

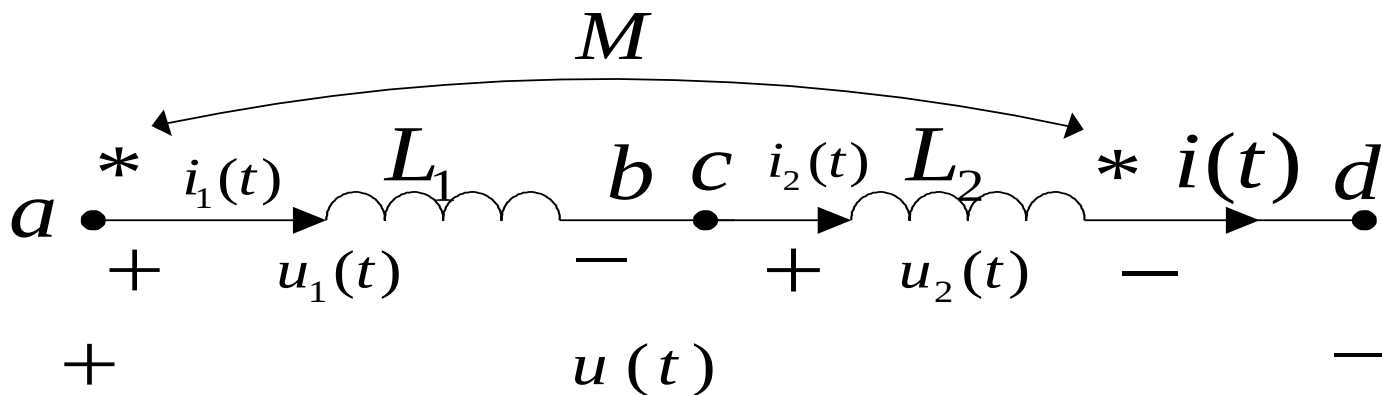


图 6.9.2b 有互感 M 的 L_1, L_2 两线圈反串

$$\therefore u(t) = u_{ad}(t) = u_1(t) + u_2(t)$$

$$\begin{cases} u_1(t) = L_1 \frac{di_1(t)}{dt} - M \frac{di_2(t)}{dt} = (L_1 - M) \frac{di(t)}{dt} \\ u_2(t) = L_2 \frac{di_2(t)}{dt} - M \frac{di_1(t)}{dt} = (L_2 - M) \frac{di(t)}{dt} \end{cases}$$

$$u(t) = [(L_1 - M) + (L_2 - M)] \frac{di(t)}{dt} = (L_1 + L_2 - 2M) \frac{di(t)}{dt}$$

$$u(t) = L \frac{di(t)}{dt} = (L_1 + L_2 + 2M) \frac{di(t)}{dt}$$

$$\therefore L = L_1 + L_2 - 2M$$

6 - 9 - 2 (2) 式

2、 并联： 同样也有同名端相并和异名端相并两种情况。

(1) 同名端相并： 如图6.9.2c) 所示。

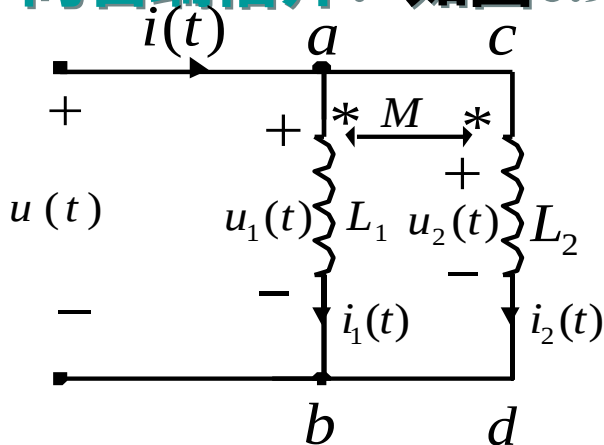


图 6.9.2c)

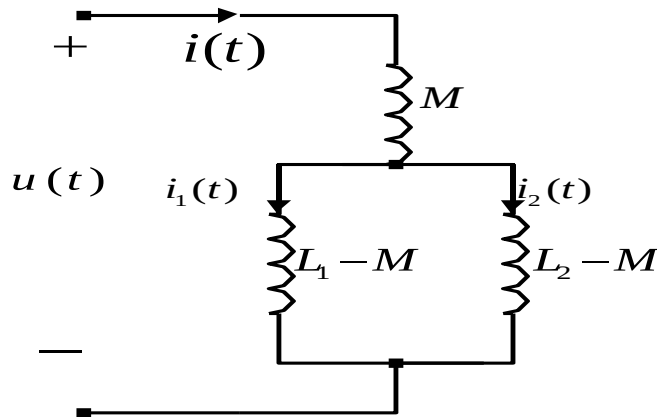


图 6.9.2d) 同名端相并的具有互感耦合两线圈的去耦等效电路

$$u_1(t) = u_2(t) = u(t)$$

$$i_1(t) + i_2(t) = i(t)$$

$$\begin{cases} u_1(t) = L_1 \frac{di_1(t)}{dt} + M \frac{di_2(t)}{dt} = L_1 \frac{di_1(t)}{dt} + M \frac{d[i(t) - i_1(t)]}{dt} = M \frac{di(t)}{dt} + (L_1 - M) \frac{di_1(t)}{dt} \\ u_2(t) = L_2 \frac{di_2(t)}{dt} + M \frac{di_1(t)}{dt} = L_2 \frac{di_2(t)}{dt} + M \frac{d[i(t) - i_2(t)]}{dt} = M \frac{di(t)}{dt} + (L_2 - M) \frac{di_2(t)}{dt} \end{cases}$$

上式表示的伏安关系用6.9.2d)图所示的电路也完全能实现。

∴ 图6.9.2d)是6.9.2c) 同名端相并的互感耦合线圈的等效去耦电路

(2) 异名端相并：将6.9.1b)中两个绕向相反的线圈a, c并到一起, bd并到一起, $i_1(t)$, $i_2(t)$ 从异名端流进。如图6.9.2e)所示。

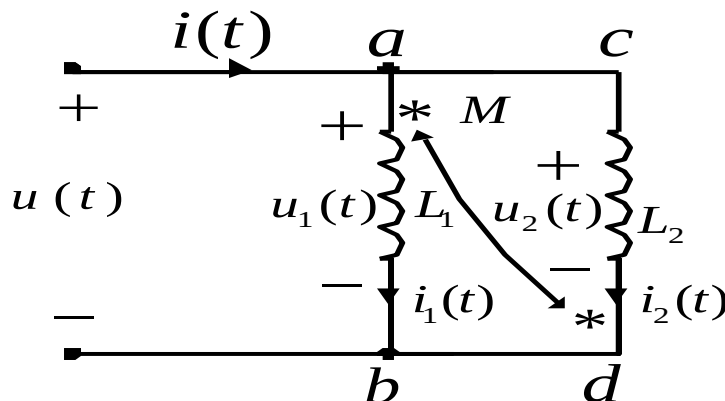


图 6.9.2e)

$$u_1(t) = u_2(t) = u(t) \quad i_1(t) + i_2(t) = i(t)$$

$$u_1(t) = L_1 \frac{di_1(t)}{dt} - M \frac{di_2(t)}{dt} = L_1 \frac{di_1(t)}{dt} - M \frac{d[i(t) - i_1(t)]}{dt} = L_1 \frac{di_1(t)}{dt} + M \frac{di(t)}{dt} - M \frac{di_1(t)}{dt}$$

$$u_1(t) = (-M) \frac{di(t)}{dt} + (L_1 + M) \frac{di_1(t)}{dt}$$

同理：
$$u_2(t) = (-M) \frac{di(t)}{dt} + (L_2 + M) \frac{di_2(t)}{dt}$$

上面两式的伏安特性可以用图6.9.2f表示。图6.9.2f)是6.9.2e)的异名端相并的具有互感耦合线圈的去耦等效电路。

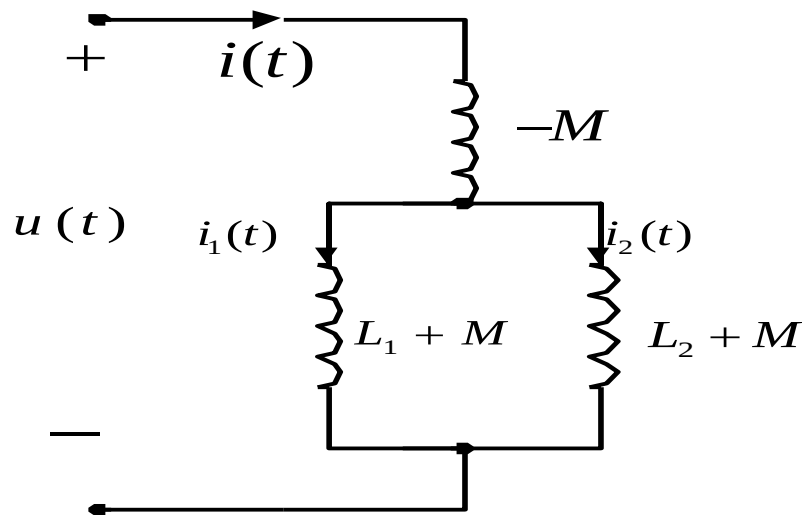


图6.9.2f

3. 具有互感的两线圈只有一个端纽联接在一起，这时也分同名端接在一起和异名端接在一起两种情况。

同名端接在一起，与同名端并联一样处理，如图6.9.2g) 所示。异名端接在一起与异名端相并一样处理，如图6.9.2h) 所示。

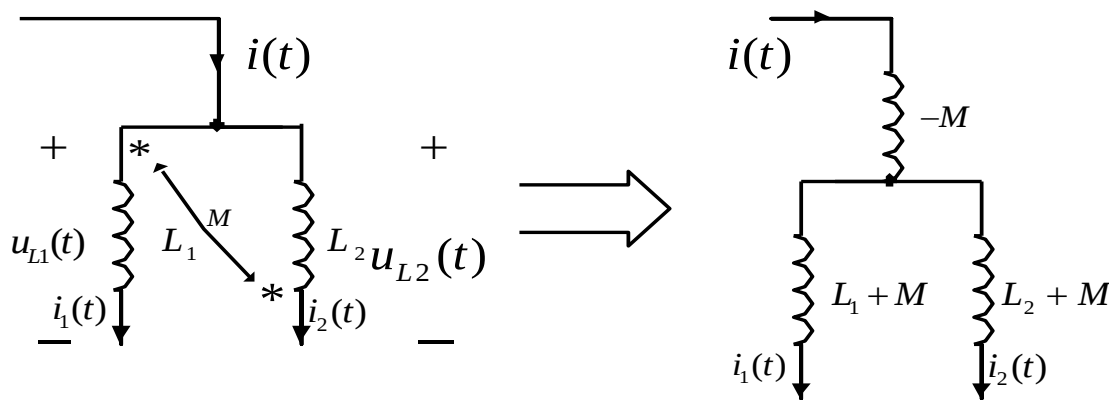


图6.9.2g) 6.9.2h

6.9.3 空心变压器

前面分析的具有互感耦合线圈的串联，并联，及一个端钮相联的电路，其明显的特征是线圈之间不仅有磁场的耦合还有电流的直接耦合，如 $i_1(t) = i_2(t) = i(t)$ (串) 即 $i_1(t) = i_2(t) = i(t)$ (并) 等。

如果电流之间没有直接的联系，线圈的电流，电压是通过磁耦合而产生的，这种典型电路有空心变压器和理想变压器。空心变压器是一对互感耦合线圈，线圈中无铁磁物质，其等效电路如图6.9.3a)。

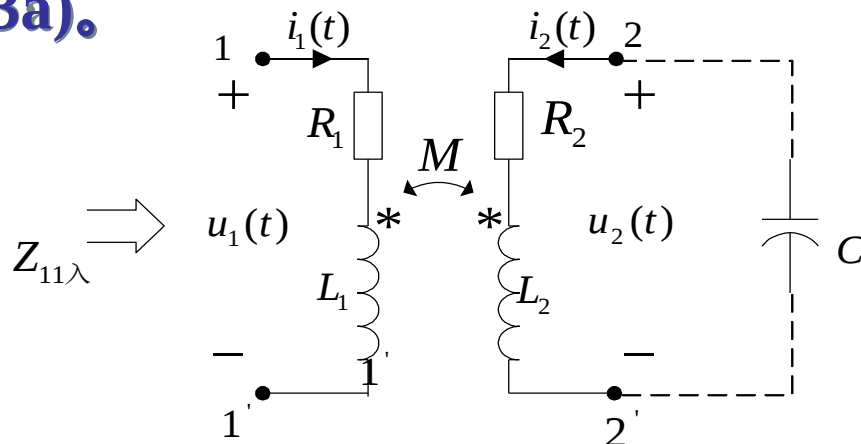


图 6.9.3a) 空心变压器等效电路

一般11'端纽之间接激励源，为输入端纽对或原方，原边，初级。2端纽外接负载，为输出端纽对，也叫付方，付边，次级。 R_1 分别为两线圈的等效电阻。现假设 u_1 与 $i_1(t)$ u_2 与 $i_2(t)$ 均从同名端流进。

$$\therefore \text{有} \begin{cases} u_1(t) = R_1 i_1(t) + L_1 \frac{di_1(t)}{dt} + M \frac{di_2(t)}{dt} \\ u_2(t) = R_2 i_2(t) + L_2 \frac{di_2(t)}{dt} + M \frac{di_1(t)}{dt} \end{cases}$$

如果 $u_1(t)$ 是正弦电压 $u_1(t) = U_{1m} \sin(\omega t + \varphi_{u_1}) = \sqrt{2} U_1 \sin(\omega t + \varphi_{u_1})$ ，电路处于稳定运行状态，所以分析其响应可用相量法 $\dot{U}_1, \dot{I}_1, \dot{I}_2, \dot{U}_2$ 。线圈1的等效阻抗为 $Z_{L1} = R_1 + j\omega L_1$ ， $Z_{L1} = R_1 + j\omega L_1$

$$\therefore \text{有} \begin{cases} \dot{U}_1 = R_1 \dot{I}_1 + j\omega L_1 \dot{I}_1 + j\omega M \dot{I}_2 \\ \dot{U}_2 = R_2 \dot{I}_2 + j\omega L_2 \dot{I}_2 + j\omega M \dot{I}_1 \end{cases}$$

现设22'端纽外接C元件, $Z_c = -j\frac{1}{\omega C}\Omega$, $\dot{U}_2 = -\dot{I}_2 \cdot (-j\frac{1}{\omega C})$

则有电路方程为

$$\begin{cases} R_1 \dot{I}_1 + j\omega L_1 \dot{I}_1 + j\omega M \dot{I}_2 = \dot{U}_1 & 6-9-3 (1) \\ R_2 \dot{I}_2 + j\omega L_2 \dot{I}_2 + j\omega M \dot{I}_1 + (-j\frac{1}{\omega C}) \dot{I}_2 = 0 & 6-9-3 (2) \end{cases}$$

整理, 得:

令 $Z_{11} = R_1 + j\omega L_1$ $Z_{22} = R_2 + j\omega L_2 - j\frac{1}{\omega C}$

则上式为:

$$\begin{cases} Z_{11} \dot{I}_1 + j\omega M \dot{I}_2 = \dot{U}_1 \\ j\omega M \dot{I}_1 + Z_{22} \dot{I}_2 = 0 \end{cases}$$

$$\dot{I}_1 = \frac{\begin{pmatrix} \dot{U}_1 & j\omega M \\ 0 & Z_{22} \end{pmatrix}}{\begin{pmatrix} Z_{11} & j\omega M \\ j\omega M & Z_{22} \end{pmatrix}} = \frac{Z_{22} \dot{U}_1}{Z_{11}Z_{22} - (j\omega M)^2} = \frac{Z_{22} \dot{U}_1}{Z_{11}Z_{22} + (\omega M)^2} = \frac{\dot{U}_1}{Z_{11} + \frac{(\omega M)^2}{Z_{22}}}$$

$$\dot{I}_1 = \frac{\dot{U}_1}{Z_{11\lambda}} \quad \therefore Z_{11\lambda} = Z_{11} + \frac{(\omega M)^2}{Z_{22}} = R_1 + j\omega L_1 + \frac{(\omega M)^2}{Z_{22}} \quad 6-9-3 (3)$$

$\frac{(\omega M)^2}{Z_{22}}$ 是 $22'$ 线圈及 C 元件反射到 $11'$ 线圈的等效阻抗用 Z_{1re} 表示

$$\therefore Z_{1re} = \frac{(\omega M)^2}{Z_{22}} \quad 6-9-3 (4)$$

其中 Z_{22} 是 $\dot{I}_2$ 流经的所有元件的阻抗之和。 Z_{1re} 的位置在线圈 1 的串联支路上。所以如果只求 I_1 及电源 U_1 的功率，可以用等效去耦电路图 6.9.3b)。

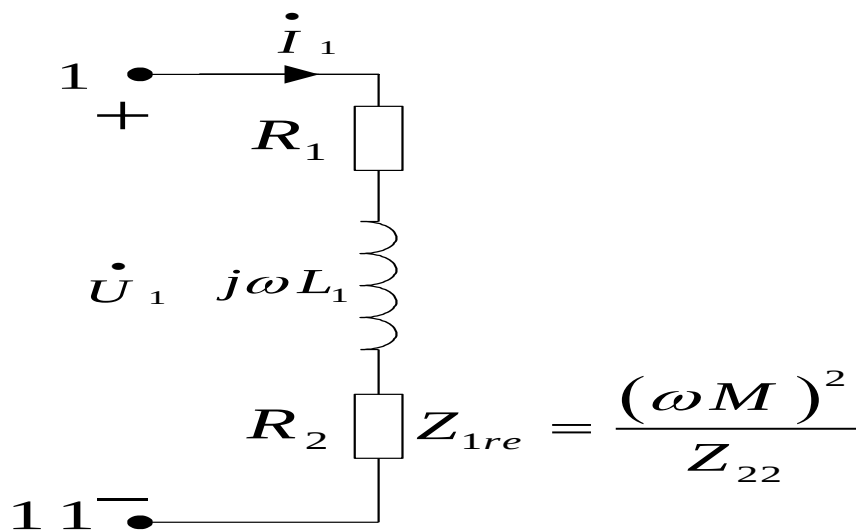


图 6.9.3b)空心变压器原边的等效电路

当 $\dot{I}_1$ 计算出来后, $\dot{I}_2$ 便迎刃而解了, $\dot{I}_2 = \frac{-j\omega M \dot{I}_1}{Z_{22}}$ 。

同理, 原方也可以折合 (反射) 到付方。原方反射到副方的

反射阻抗 $Z_{2re} = \frac{(\omega M)^2}{Z_{11}}$ 。

Z_{11} 是电流 $\dot{I}_1$ 所流经的所有元件的复阻抗之和, Z_{2re} 与 L_2 相

串联, Z_{2re} 用在求 22 端口的戴维南等效电路中。 $Z_{22'等} = R_2 + j\omega L_2 + Z_{2re}$

例12. 电路如图6.9.3c)所示, 已知 $R_1 = 20\Omega$, $R_2 = 0.08\Omega$, $L_1 = 3.6H$, $L_2 = 0.06H$, $M = 0.465H$, $R_L = 42\Omega$, $M = 0.465H$ 。正弦电压 $u_s(t) = 115\cos 314V$ 。求初级电流 $\dot{I}_1$, 次级电流 $\dot{I}_2$ 。

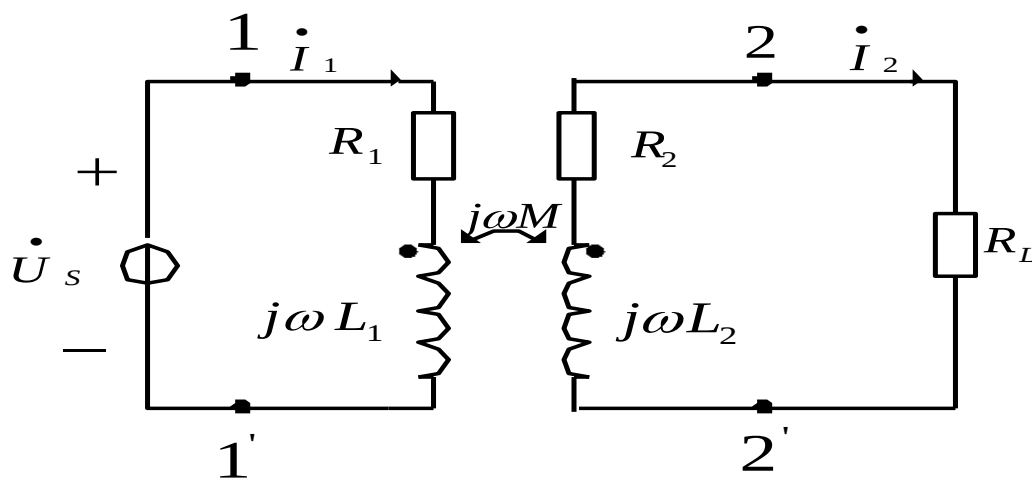


图 6.9.3c) 例12图

解法一：直接列回路方程。 $\dot{I}_1, \dot{I}_2$ 从异名端流进

$$\begin{cases} (R_1 + j\omega L_1) \dot{I}_1 - j\omega M \dot{I}_2 = \dot{U}_s \\ (R_2 + j\omega L_2 + R_L) \dot{I}_2 - j\omega M \dot{I}_1 = 0 \end{cases}$$

$$R_1 + j\omega L_1 = 20 + j314 \times 3.6 = 20 + j1131 \doteq 1131 \angle 89^\circ \Omega$$

$$R_2 + R_L + j\omega L_2 = 0.08 + 42 + j314 \times 0.06 = 42.08 + j18.85 = 46.1 \angle 24.1^\circ \Omega$$

$$j\omega M = j314 \times 0.465 = j146 \Omega$$

$$\begin{cases} 1131 \angle 89^\circ \dot{I}_1 - j146 \dot{I}_2 = \frac{115}{\sqrt{2}} \angle 0^\circ = 81.56 \angle 0^\circ \\ -j146 \dot{I}_1 + 46.1 \angle 24.1^\circ \dot{I}_2 = 0 \end{cases}$$

解得 $\dot{I}_1 = 78.15 \angle -64.9^\circ$ $\dot{I}_2 = \frac{0.35}{\sqrt{2}} \angle 1^\circ = 0.247 \angle 1^\circ \text{ (mA)}$

解法二：用反射阻抗。

$$Z_{22} = R_L + R_2 + j\omega L = 46.1\angle 24.1^\circ \Omega \quad Z_{11} = R_1 + j\omega L = 1131\angle 89^\circ \Omega = 20 + j1131\Omega$$

$$Z_{1re} = \frac{(\omega M)^2}{Z_{22}} = \frac{146^2}{46.1\angle 24.1^\circ} = 464\angle -24.1^\circ = 422 - j189\Omega$$

$$Z_{11'\lambda} = Z_{11} + Z_{1re} = 20 + j1131 + 422 - j189 = 442 + j942\Omega$$

$$\dot{I}_1 = \frac{\dot{U}_s}{Z_{11'\lambda}} = \frac{81.56\angle 0^\circ}{442 + j942} = \frac{81.56\angle 0^\circ}{1040\angle 64.9^\circ} = 0.078\angle -64.9^\circ \text{ A} = 78\angle -64.9^\circ \text{ mA}$$

$$Z_{22} \dot{I}_2 = j\omega M \dot{I}_1$$

$$\dot{I}_2 = \frac{j\omega M \dot{I}_1}{Z_{22}} = \frac{j146 \times 0.078\angle -64.9^\circ}{46.1\angle 24.1^\circ} = 0.247\angle 1^\circ \text{ A} = 247\angle 1^\circ \text{ mA}$$

解法三：用戴维南电路，见图6.9.3d) 22' 端口开路， $\dot{I}_2$ 接假定方向。求：22'端口的开路电压 $U_{220} = (R_2 + j\omega L_2)I_2 + j\omega M I_1 = j\omega M I_1$ ($\dot{I}_2 = 0$)

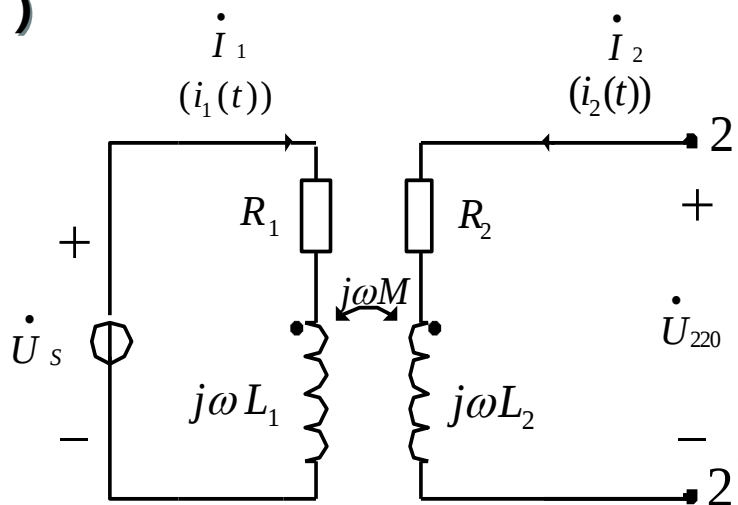


图 6.9.3d) 22'开路求 22' 以左的戴维南等效电路

$$(R_1 + j\omega L_1)\dot{I}_1 + j\omega M \dot{I}_2 = \dot{U}_s$$

$$\because \dot{I}_2 = 0 \quad \therefore \dot{I}_1 = \frac{\dot{U}_s}{R_1 + j\omega L_1} = \frac{81.56 \angle 0^\circ}{1131 \angle 89^\circ} = 0.072 \angle -89^\circ \text{ A}$$

$$\dot{U}_{220} = j146 \times 0.072 \angle -89^\circ = 10.529 \angle 1^\circ \text{ V}$$

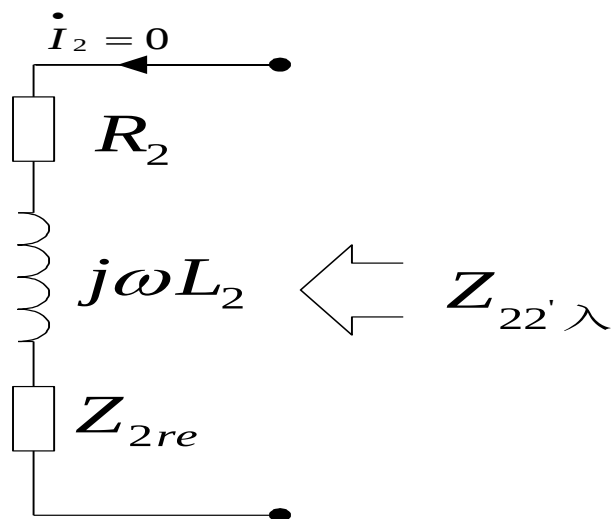


图 6.9.3e) 求22'以左电路的入端阻抗

求 22' 端口的入端等效阻抗 $Z_{22'\lambda}$

将 $\dot{U}_s$ 置0, $\dot{I}_1$ 通过的全部阻抗为

$$Z_{11} = R_1 + j\omega L_1 = 1131\angle 89^\circ \quad \text{折射}$$

到副边 Z_{2re} 与 $R_2 + j\omega L_2$ 相串联

$$Z_{2re} = \frac{(\omega M)^2}{Z_{11}} = \frac{146^2}{1131\angle 89^\circ} = 18.85\angle -89^\circ \Omega$$

$$\therefore Z_{22\lambda} = R_2 + j\omega L_2 + Z_{2re} \doteq 0.08 + j18.85 + 18.85\angle -90^\circ \approx 0.08\Omega$$

∴ 等效戴维南电路如图6.9.3f)。

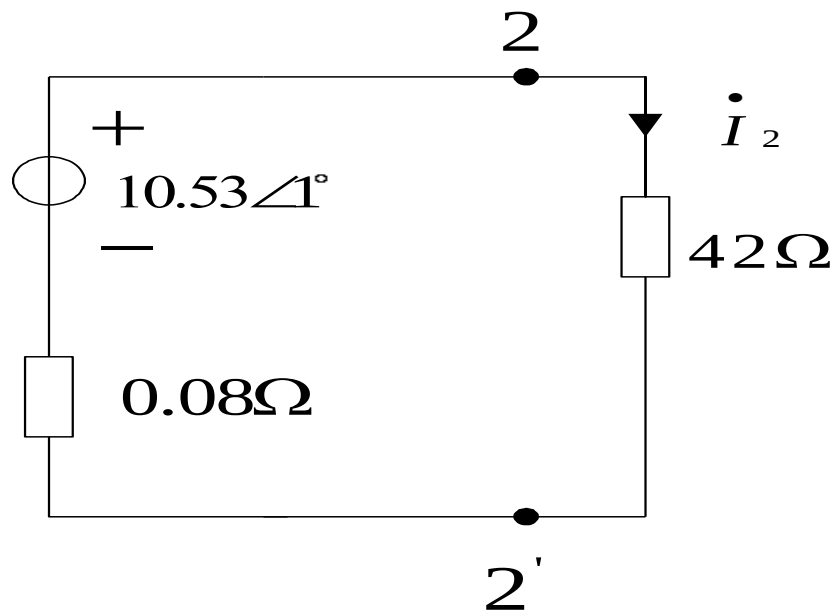


图 6.9.3f

$$\dot{I}_2 = \frac{10.53\angle 1^\circ}{42.08} = 0.25\angle 1^\circ = 250\angle 1^\circ \text{ mA}$$

结果同

例13. 有电路如图6.9.3g), 已知 $u_s(t) = 10 \cos \omega t V$, $\omega = 10^6 \text{ rad/s}$, $L_1 = L_2 = 10^{-3} H$, $\frac{1}{\omega C_1} = \frac{1}{\omega C_2} = 1 K\Omega$, $R_1 = 10\Omega$, $R_2 = 40\Omega$ 求: 使获得最大功率的M值? 并计算出 $P_{R_2 \max}$ 。

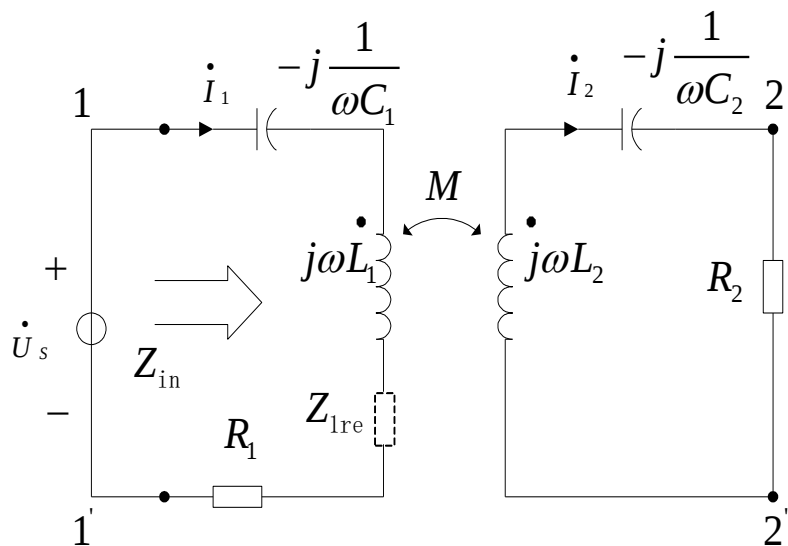


图 6.9.3g)例13电路图

解: 将付边反射到原边。 $Z_{1re} = \frac{(\omega M)^2}{Z_{22}}$

$$Z_{11} = -j \frac{1}{\omega C_1} + j\omega L_1 + R_1 = -j10^3 + j10^6 \times 10^{-3} + 10 = 10\Omega$$

$$Z_{22} = -j \frac{1}{\omega C_2} + j\omega L_2 + R_2 = -j10^3 + j10^6 \times 10^{-3} + 40 = 40\Omega$$

$$Z_{1re} = \frac{(10^6 M)^2}{40} \quad \text{欲使获得最大功率则应使 } Z_{1re} = Z_{11}^*$$

$$Z_{11} \text{ 和 } Z_{1re} \text{ 为纯电阻 } \therefore Z_{1re} = Z_{11}$$

$$M = \sqrt{\frac{400}{10^{12}}} = 2 \times 10^{-5} = 20 \times 10^{-6} H$$

$$\text{当 } M = 20 \times 10^{-6} H \text{ 时, } \dot{I}_{1m} = \frac{\dot{U}_{sm}}{20} = \frac{10 \angle 0^\circ}{20} = 0.5 \angle 0^\circ$$

$$\dot{I}_{2m} = \frac{j\omega M \dot{I}_1}{Z_{22}} = \frac{j10^6 \times 20 \times 10^{-6} \times 0.5 \angle 0^\circ}{40} = 0.25 \angle 90^\circ$$

$$P_{R_2 \max} = I_2^2 R_2 = \left(\frac{I_{2m}}{\sqrt{2}} \right)^2 R_2 = \frac{1}{2} \times 0.25^2 \times 40 = 1.25 \text{ W}$$

$$\dot{U}_{c2m} = -j \frac{1}{\omega C_2} \cdot \dot{I}_{2m} = -j10^3 \times 0.25 \angle 90^\circ = 250 \angle 0^\circ \text{ V}$$

解法二：戴维南电路

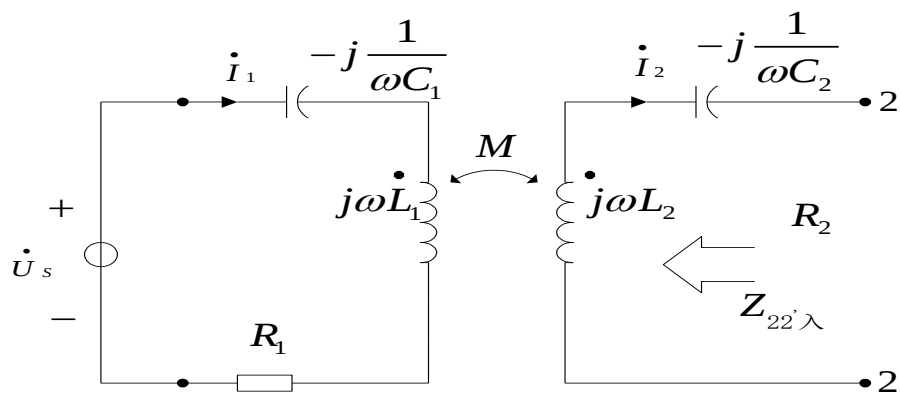


图 6.9.3h) 求例13中以左的戴维南电路

$$Z_{22'\lambda} = -j\frac{1}{\omega C_2} + j\omega L_2 + Z_{2re} = -j10^3 + j10^3 + Z_{2re}$$

$$Z_{2re} = \frac{(\omega M)^2}{Z_{11}} = \frac{10^{12} M^2}{-j\frac{1}{\omega C_1} + j\omega L_1 + R_1} = \frac{10^{12} M^2}{10}$$

$$Z_{22'\lambda} = \frac{10^{12} M^2}{10}$$

当 $R_L = \frac{10^{12} M^2}{10} = 40$ 可以获得最大功率。现 $R_L = R_2 = 40\Omega$ 已定，所以只能调M。

$$\therefore 10^{12} M^2 = 400 \quad M^2 = \frac{400}{10^{12}} \quad M = \pm 20 \times 10^{-6} \Omega \text{ 取正值，结果同。}$$

$$\dot{I}_2 = 0 \text{ 时, } \dot{I}_{1m} = \frac{\dot{U}_{sm}}{-j\frac{1}{\omega C_1} + j\omega L_1 + R_1} = \frac{10\angle 0^\circ}{10} = 1\angle 0^\circ \text{ A}$$

$$\dot{U}_{m22'\text{开}} = j\omega M \dot{I}_{1m} = j20 \times 1\angle 0^\circ = 20\angle 90^\circ \text{ V}$$

$$\therefore \dot{I}_{2m} = \frac{\dot{U}_{m22'\text{开}}}{2R_L} = \frac{20\angle 90^\circ}{2 \times 40} = \frac{1}{4}\angle 90^\circ \text{ A}$$

$\dot{I}_2$ 与前面求法结果相同, $P_{2\max}$ 也相同。

$$\dot{U}_{c2m} = -j\frac{1}{\omega C_2} \times \dot{I}_{2m} = -j10^3 \times \frac{1}{4}\angle 90^\circ = 250\angle 0^\circ \text{ 结果同}$$

6.9.4理想变压器

1. 理想变压器是实际变压器的理想化模型，其理想条件为：

1) 两线圈的耦合系数为1。 $\left(K = \frac{M}{\sqrt{L_1 L_2}} = 1 \right)$

2) 铁心材料具有超导磁性即导磁率 $\mu = \infty$ ，这种铁芯中产生磁通所需要的电流趋近于0（毕奥 - 沙伐 - 拉

普拉斯定理：
$$dB = \frac{\mu}{4\pi} \cdot \frac{Idl \sin\left(d\vec{I}, \vec{r}\right)}{r^2}$$

3) 原付线圈的电阻均等于0，故理想变压器没有功率损耗。实际变压器可以由理想变压器与理想电阻，电感，电容组成。

2. 理想变压器的伏安特性:

由于全磁耦合，所以通过理想变压器的线圈中的磁通都相同。现假设有一对线圈，线圈1接激励为原线圈、原边，有 N_1 匝。线圈2为副线圈、副边，有 N_2 匝。原线圈的磁链 $\psi_1(t) = N_1\phi(t)$ ，副线圈的磁链 $\psi_2(t) = N_2\phi(t)$

$$\begin{cases} u_1(t) = \frac{d\psi_1(t)}{dt} = N_1 \frac{d\phi(t)}{dt} \\ u_2(t) = \frac{d\psi_2(t)}{dt} = N_2 \frac{d\phi(t)}{dt} \end{cases} \quad \frac{u_1(t)}{u_2(t)} = \frac{N_1}{N_2} = n \quad \text{6-9-4 (1)} \quad n \text{称为变化}$$

根据安培环路定律有 $\oint_l \vec{H} d\vec{l} = N_1 i_1(t) + N_2 i_2(t)$

$$H = \frac{B}{\mu} = \frac{\frac{\phi}{S}}{\mu(\text{无限量})} = 0$$

$$\therefore N_1 i_1(t) + N_2 i_2(t) = 0$$

$$\therefore \frac{i_1(t)}{i_2(t)} = -\frac{N_2}{N_1} = -\frac{1}{n} \quad \mathbf{6-9-4 \quad (2)}$$

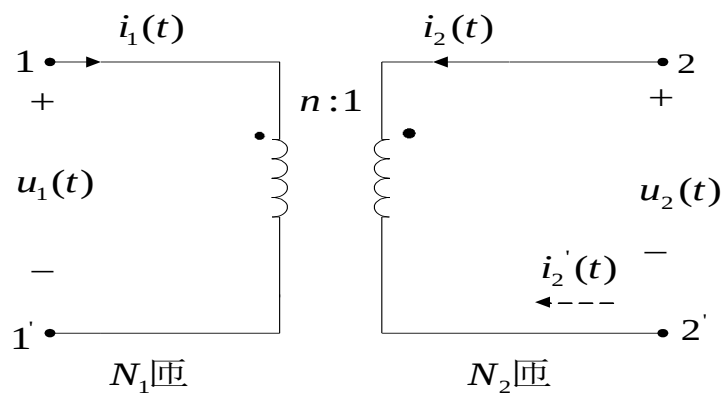


图6.9.4a理想变压器

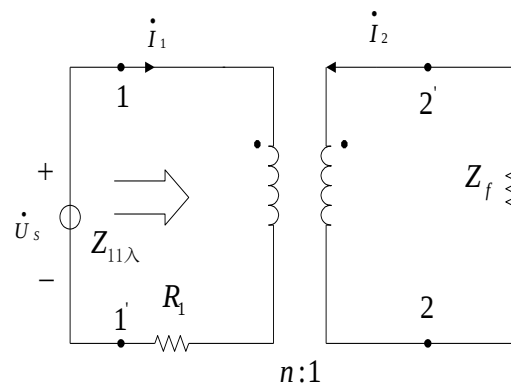


图6.9.4b

6 - 9-4 (1) , (2) 两式称为理想变压器的**伏安特性方程式**。均在图6.9.4a)所示的关联方向下成立。如果 $i_2(t)$ 与假定方向相反设为 $i'(t)$,

$$\text{则 } \frac{i_1(t)}{i'_2(t)} = \frac{1}{n} \quad \text{6-9-4 (3)}$$

如果 $u_1(t)$ 为正弦激励则 $i_1(t), i_2(t), u_2(t)$ 均为同频率正弦量, 可以用相量法。

$$\frac{\dot{U}_1}{\dot{U}_2} = n \quad \frac{\dot{I}_1}{\dot{I}_2} = -\frac{1}{n} \quad \text{6-9-4 (4)}$$

$$\therefore \dot{U}_1 = n\dot{U}_2 \quad \dot{I}_1 = -\frac{1}{n}\dot{I}_2 \quad \therefore \frac{\dot{U}_1}{\dot{I}_1} = \frac{n\dot{U}_2}{\frac{1}{n}(-\dot{I}_2)} = n^2 Z_f \quad \frac{\dot{U}_1}{\dot{I}_1} = Z_{11'\lambda}$$

$$\therefore Z_{11'\lambda} = n^2 Z_f \quad \text{6-9-4 (5)}$$

当理想变压器的变比为 n ，负载阻抗为 Z_f 时从 $11'$ 两端或电压源两端看等效阻抗为 $n^2 Z_f$ 。见图6.9.4.c)。

理想变压器不仅可以变电压，变电流，也可以变换阻抗，所以，理想变压器也叫做理想变量器或阻抗变换器。

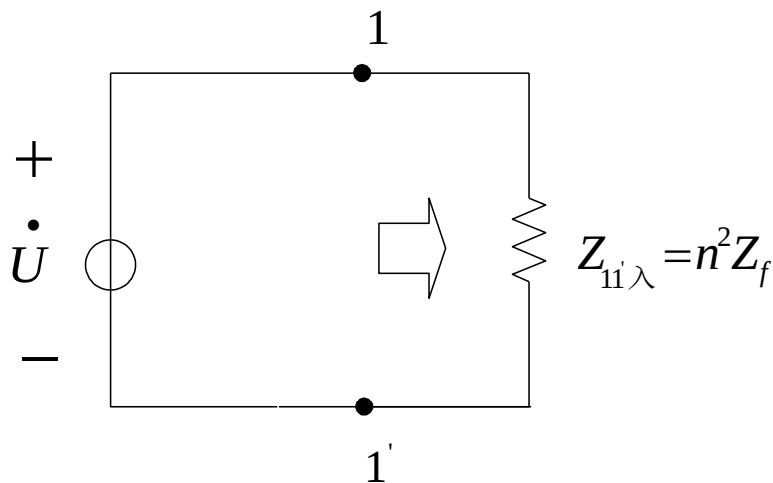


图6.9.4c)

例14. 6.9.4d)图示电路由理想电流源激励，求输出电压 $\dot{U}_2$ 。

变比 $n = \frac{1}{2}$ $\dot{I}_1 = \dot{I}_s = 10\angle 0^\circ \text{ A}$

$$\frac{\dot{I}_1}{\dot{I}_2} = \frac{1}{n} = \frac{1}{\frac{1}{2}} = 2$$

$$\therefore \dot{I}_2 = \frac{1}{2} \dot{I}_1 = 5\angle 0^\circ \text{ A}$$

$$Z_2 = \frac{-j1 \times (1 + j2)}{-j1 + j2 + 1}$$

$$\dot{U}_{AB} = Z_2 \dot{I}_2 = \frac{-j \times (1 + j2) \times 5\angle 0^\circ}{1 + j1}$$

$$\dot{U}_2 = \frac{\dot{U}_{AB} \times 1}{1 + j2} = \frac{-j1 \times (1 + j2) \times 5\angle 0^\circ}{(1 + j2)(1 + j1)} = \frac{5\angle 90^\circ}{\sqrt{2}\angle 45^\circ} = 3.535\angle -135^\circ \text{ V}$$

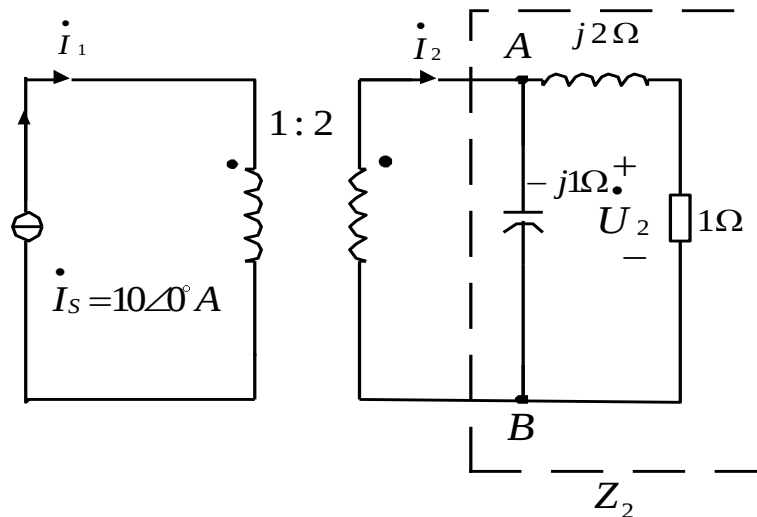


图 6.9.4d)例14图

例15. 欲使电阻从理想变压器获得最大功率，求理想变压器的变比

电源内阻 $R_s = \frac{500}{2} = 250\Omega$

反射阻抗 $Z_{11'\lambda} = n^2 \times 10$

$\therefore Z_{11'\lambda} = R_s$ 时能获得最大功率

$$n^2 \times 10 = 250$$

$$n^2 = 25$$

$$\therefore n = 5$$

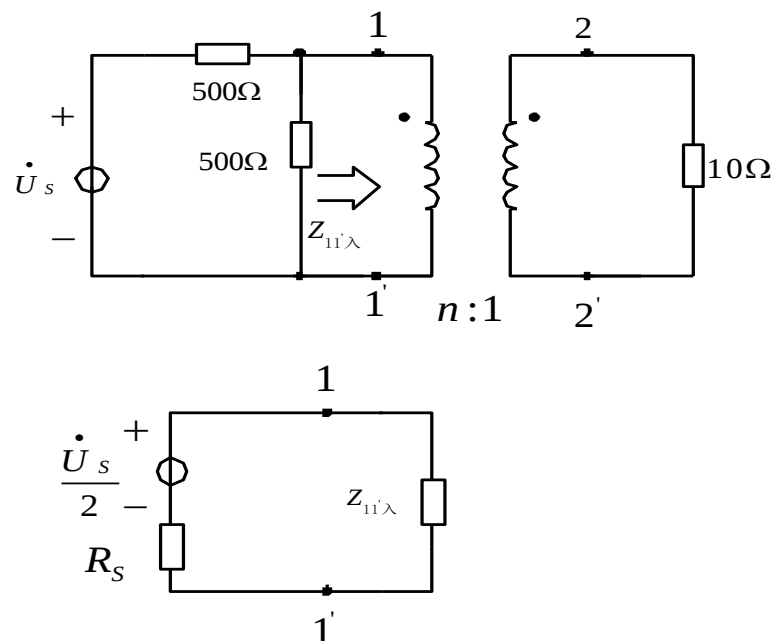


图6.9.4e)例15图